



فصل پنجم:

پیچش میله ها

فصل پنجم - پیچش میله ها

۲-۳ فرمولهای پیچش

$$d\phi/dx = cte \longrightarrow T = \int_A G\rho^2 \frac{d\phi}{dx} dA = \frac{d\phi}{dx} \int_A G\rho^2 dA$$

برای ساده تر شدن رابطه فوق با فرض ثابت بودن G در در مقطع، آنرا از انتگرال خارج مینماییم.

فرض ۶ مصالح در مقطع همگن میباشند.

بنابراین رابطه فوق بصورت زیر خلاصه میگردد که در آن J ممان اینرسی قطبی مقطع بشعاع R میباشد، GJ صلبیت پیچشی نامیده میشود:

$$J = \int_A \rho^2 dA = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ}$$

$$T = G \frac{d\phi}{dx} \int_A \rho^2 dA = GJ \frac{d\phi}{dx}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

$$\tau_{x\theta} = G\rho \frac{d\phi}{dx}$$

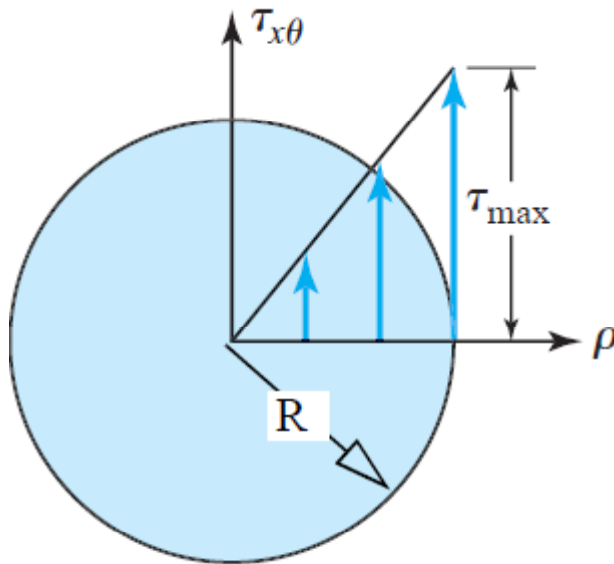
با جاگذاری رابطه فوق در رابطه زیر خواهیم داشت:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ}$$



$$\tau_{x\theta} = \frac{T\rho}{J}$$

از آنجاییکه T و J در مقطع ثابت میباشند، بنابراین تنش برشی فقط تابعی از شعاع می باشد. تغییر زاویه میان مقاطع X1 و X2 نیز بصورت زیر تعریف میشود:



$$\phi_2 - \phi_1 = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{T}{GJ} dx$$

جهت ساده سازی فرمول فوق باید مقادیر T و J و G را از انتگرال خارج نمود.

فصل پنجم - پیچش میله ها

بنابراین فرضیات زیر در نظر گرفته میشوند:

فرض ۸ مصالح بین دو مقطع همگن میباشند (G ثابت است).

فرض ۹ شفت میان دو مقطع مورد بررسی مخروطی نمیباشد (J ثابت است).

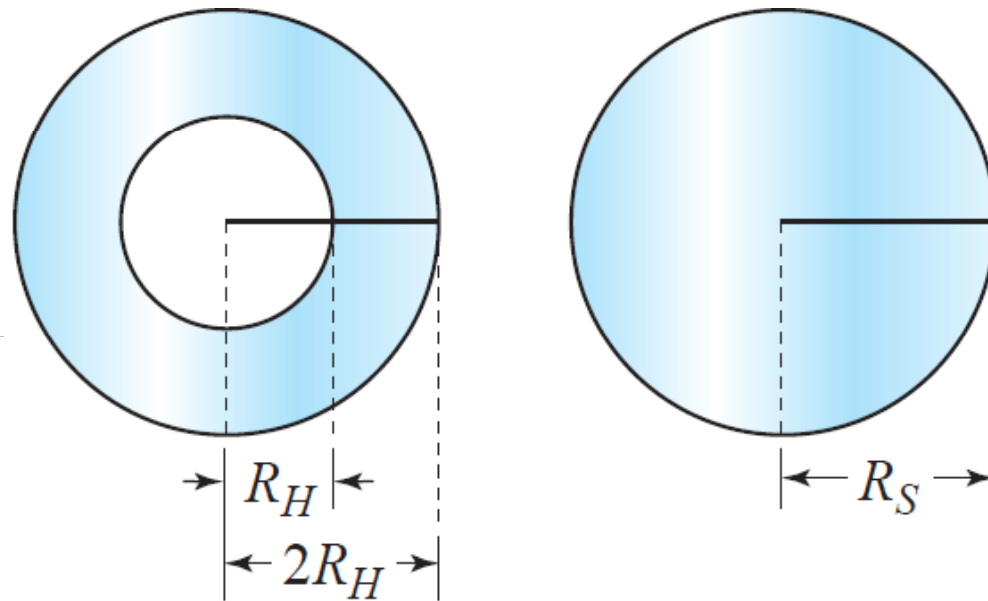
فرض ۱۰ ترک خارجی (و در نتیجه ترک داخلی) بین دو مقطع نسبت به X تغییر نمیکند (T ثابت است).

با فرضیات فوق، رابطه بصورت ساده تر زیر تبدیل میگردد:

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{T(x_2 - x_1)}{GJ}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

مثال (۴-۵) دو شافت شکل زیر از مصالح یکسان و دارای سطح مقطع مشابه میباشند. کدامیک از مقاطع زیر دارای ممان اینرسی قطبی بیشتری میباشند؟



حل: میتوان مقادیر شعاعها را بر حسب مساحت نوشت و سپس ممان اینرسی هر مقطع را محاسبه نموده و نسبت بیگدیگر سنجید (اندیس H مخفف واژه Hollow یا توخالی بوده و اندیس S مخفف واژه Solid یا توپر میباشد):

$$A_H = \pi[(2R_H)^2 - R_H^2] = A$$

$$R_H^2 = \frac{A}{3\pi}$$

$$A_S = \pi R_S^2 = A$$

$$R_S^2 = \frac{A}{\pi}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

ممان اینرسی قطبی برای شفتی که دارای شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o میباشد بصورت زیر محاسبه میگردد و با استفاده از رابطه بدست آمده، ممان اینرسی قطبی مقطع توخالی و سپس توپر محاسبه میگردد:

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_{R_i}^{R_o} \rho^2 (2\pi\rho) d\rho = \frac{\pi}{2} \rho^4 \Big|_{R_i}^{R_o} = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4)$$

$$J_H = \frac{\pi}{2} [(2R_H)^4 - R_H^4] = \frac{15}{2} \pi R_H^4 = \frac{15}{2} \pi \left(\frac{A}{3\pi} \right)^2 = \frac{5}{6} \frac{A^2}{\pi}$$

$$J_S = \frac{\pi}{2} R_S^4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{A}{\pi} \right)^2 = \frac{A^2}{2\pi}$$

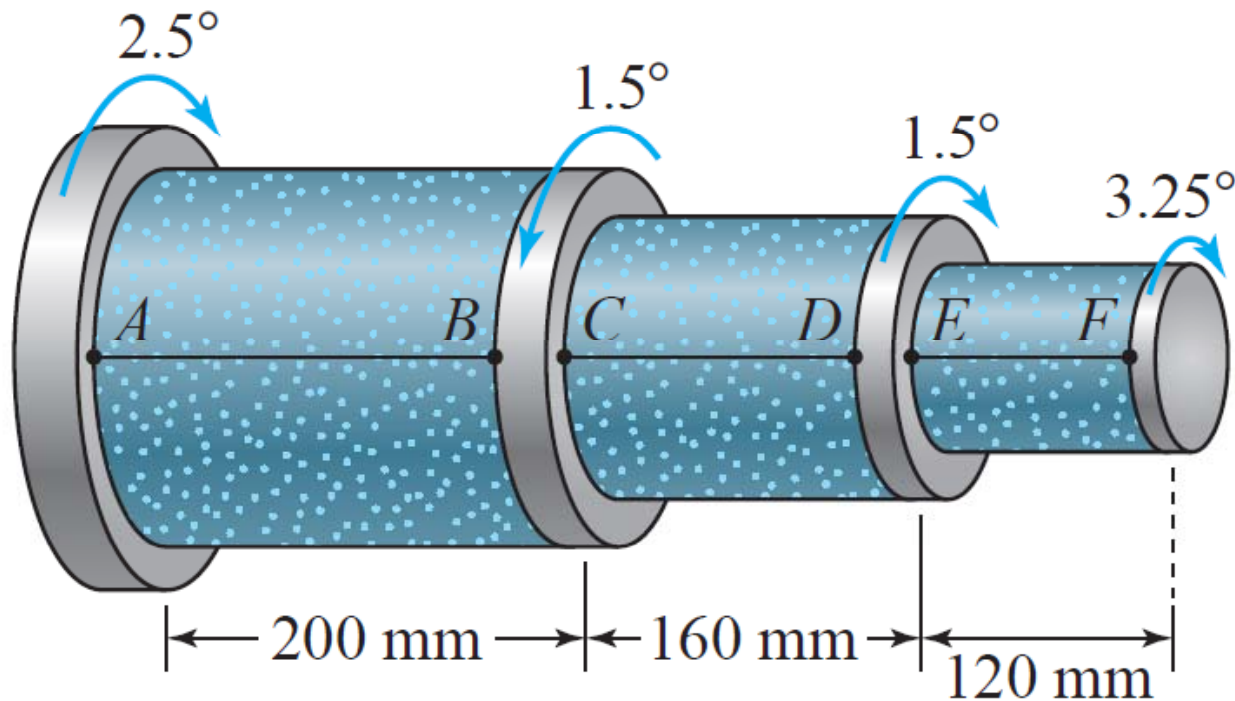
بنابراین ممان اینرسی قطبی مقطع توخالی بیش از ممان اینرسی قطبی مقطع توپر هم مساحت با آن میباشد:

$$\frac{J_H}{J_S} = \frac{5}{3} = 1.67$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

مثال (۵-۵) سه شافت استوانه ای ساخته شده از رابر ساخت بطور محکم به صفحات صلب در انتهای خود متصل میباشند. شعاع آنها ۲۰، ۱۵ و ۱۰ میلیمتر میباشد. اگر صفحات صلب، با زوایای نشان داده شده در شکل چرخانده شوند، کرنش برشی متوسط هر بخش را با فرض مستقیم ماندن خطوط نشان داده شده در شکل محاسبه نمایید؟

حل: میتوان مقادیر تغییر زاویه بین مماس و خط رسم شده در راستای محوری را در هر بخش محاسبه نموده و مقدار کرنش برشی را محاسبه نمود. فرض نمایید دیسک سمت چپ، دیسک شماره یک و دیسک سمت راست، دیسک شماره ۴ میباشد.

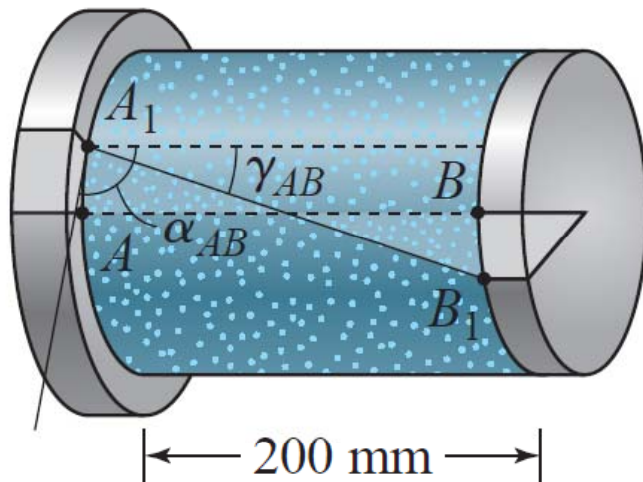


فصل پنجم - پیچش میله ها

$$\phi_1 = \frac{2.5^\circ}{180^\circ}(3.142 \text{ rad}) = 0.0436 \text{ rad} \quad \phi_2 = \frac{1.5^\circ}{180^\circ}(3.142 \text{ rad}) = 0.0262 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = \frac{1.5^\circ}{180^\circ}(3.142 \text{ rad}) = 0.0262 \text{ rad} \quad \phi_4 = \frac{3.25^\circ}{180^\circ}(3.142 \text{ rad}) = 0.0567 \text{ rad}$$

شکلهای زیر، شکل تغییرشکل یافته هر یک از بخشها را نمایش میدهد.



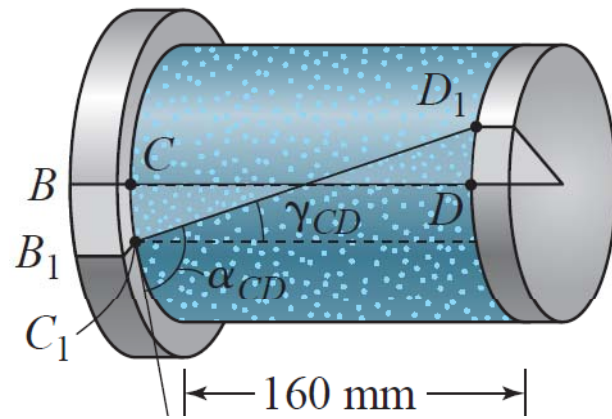
$$AA_1 = r_{AB}\phi_1 = (20 \text{ mm})(0.0436) = 0.872 \text{ mm}$$

$$BB_1 = r_{AB}\phi_2 = (20 \text{ mm})(0.0262) = 0.524 \text{ mm}$$

$$\tan |\gamma_{AB}| \approx |\gamma_{AB}| = \frac{AA_1 + BB_1}{AB} = \frac{0.872 \text{ mm} + 0.524 \text{ mm}}{200 \text{ mm}}$$

$$\gamma_{AB} = 6980 \mu\text{rad}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

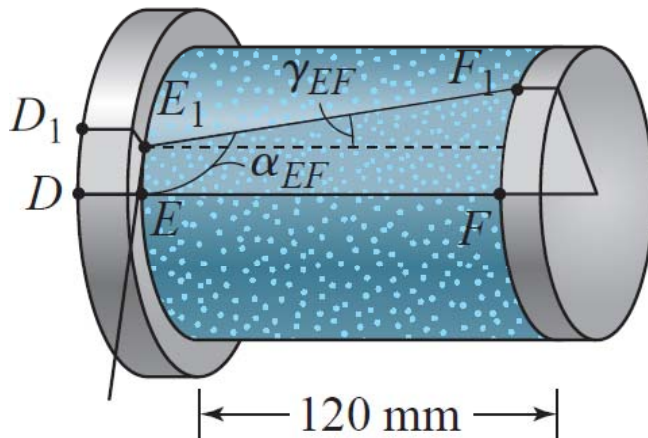


$$CC_1 = r_{CD}\phi_2 = (15 \text{ mm})(0.0262) = 0.393 \text{ mm}$$

$$DD_1 = r_{CD}\phi_3 = (15 \text{ mm})(0.0262) = 0.393 \text{ mm}$$

$$\tan |\gamma_{CD}| \approx |\gamma_{CD}| = \frac{CC_1 + DD_1}{CD} = \frac{0.393 \text{ mm} + 0.393 \text{ mm}}{160 \text{ mm}}$$

$$\gamma_{CD} = -4913 \text{ } \mu\text{rad}$$



$$EE_1 = r_{EF}\phi_3 = (10 \text{ mm})(0.0262) = 0.262 \text{ mm}$$

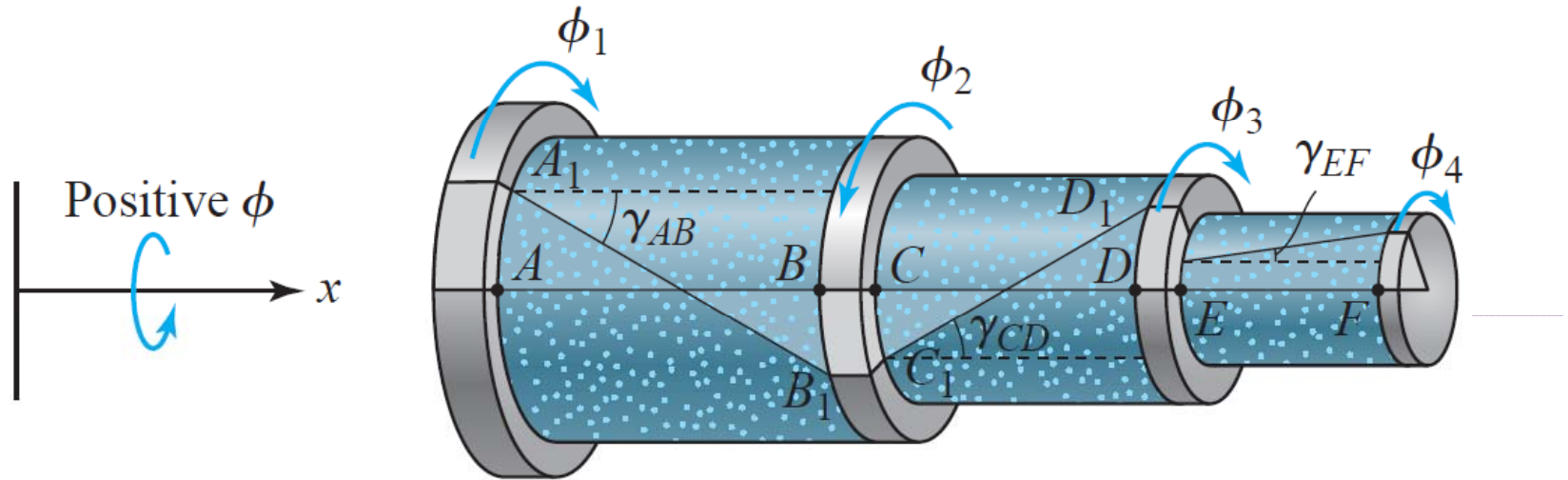
$$FF_1 = r_{EF}\phi_4 = (10 \text{ mm})(0.0567) = 0.567 \text{ mm}$$

$$\tan |\gamma_{EF}| \approx |\gamma_{EF}| = \frac{FF_1 - EE_1}{EF} = \frac{0.567 \text{ mm} - 0.262 \text{ mm}}{120 \text{ mm}}$$

$$\gamma_{CD} = -4913 \text{ } \mu\text{rad}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

روش دوم حل: میتوان برای جهت دوران، علامت تعیین نمود و سپس در هر قطعه مقدار تغییر شکل نسبی را محاسبه نموده و سپس کرنش برشی را بدست آورد:



$$\phi_1 = -0.0436 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = 0.0262 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = -0.0262 \text{ rad}$$

$$\phi_4 = -0.0567 \text{ rad}$$

$$\Delta\phi_{AB} = \phi_2 - \phi_1 = 0.0698$$

$$\gamma_{AB} = \frac{r_{AB} \Delta\phi_{AB}}{AB} = \frac{(20 \text{ mm}) (0.0698)}{(200 \text{ mm})} = 0.00698 \text{ rad}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

$$\Delta\phi_{CD} = \phi_3 - \phi_2 = -0.0524$$

$$\gamma_{AB} = \frac{r_{AB} \Delta\phi_{AB}}{AB} = \frac{(20 \text{ mm}) (0.0698)}{(200 \text{ mm})} = 0.00698 \text{ rad}$$

$$\Delta\phi_{EF} = \phi_4 - \phi_3 = -0.0305$$

$$\gamma_{EF} = \frac{r_{EF} \Delta\phi_{EF}}{EF} = \frac{(10 \text{ mm}) (-0.0305)}{120 \text{ mm}} = -0.002542 \text{ rad}$$

$$\gamma_{AB} = 6980 \text{ } \mu\text{rad}$$

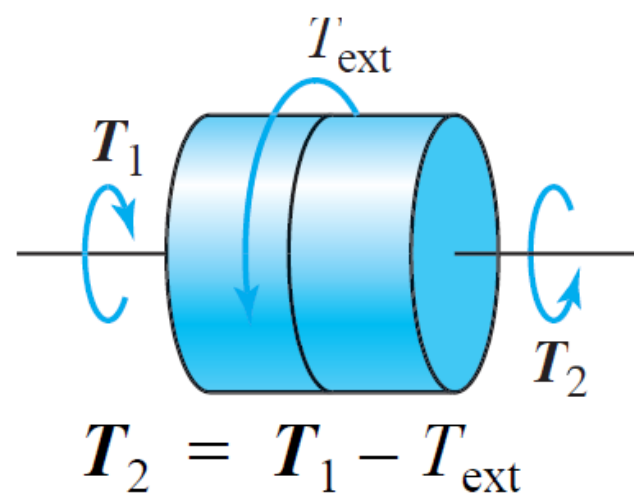
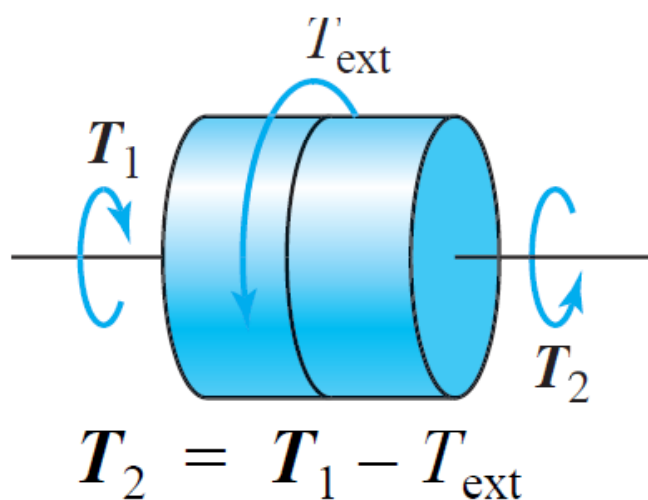
$$\gamma_{CD} = -4913 \text{ } \mu\text{rad}$$

$$\gamma_{EF} = -2542 \text{ } \mu\text{rad}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

۴-۲ دیاگرام پیچش

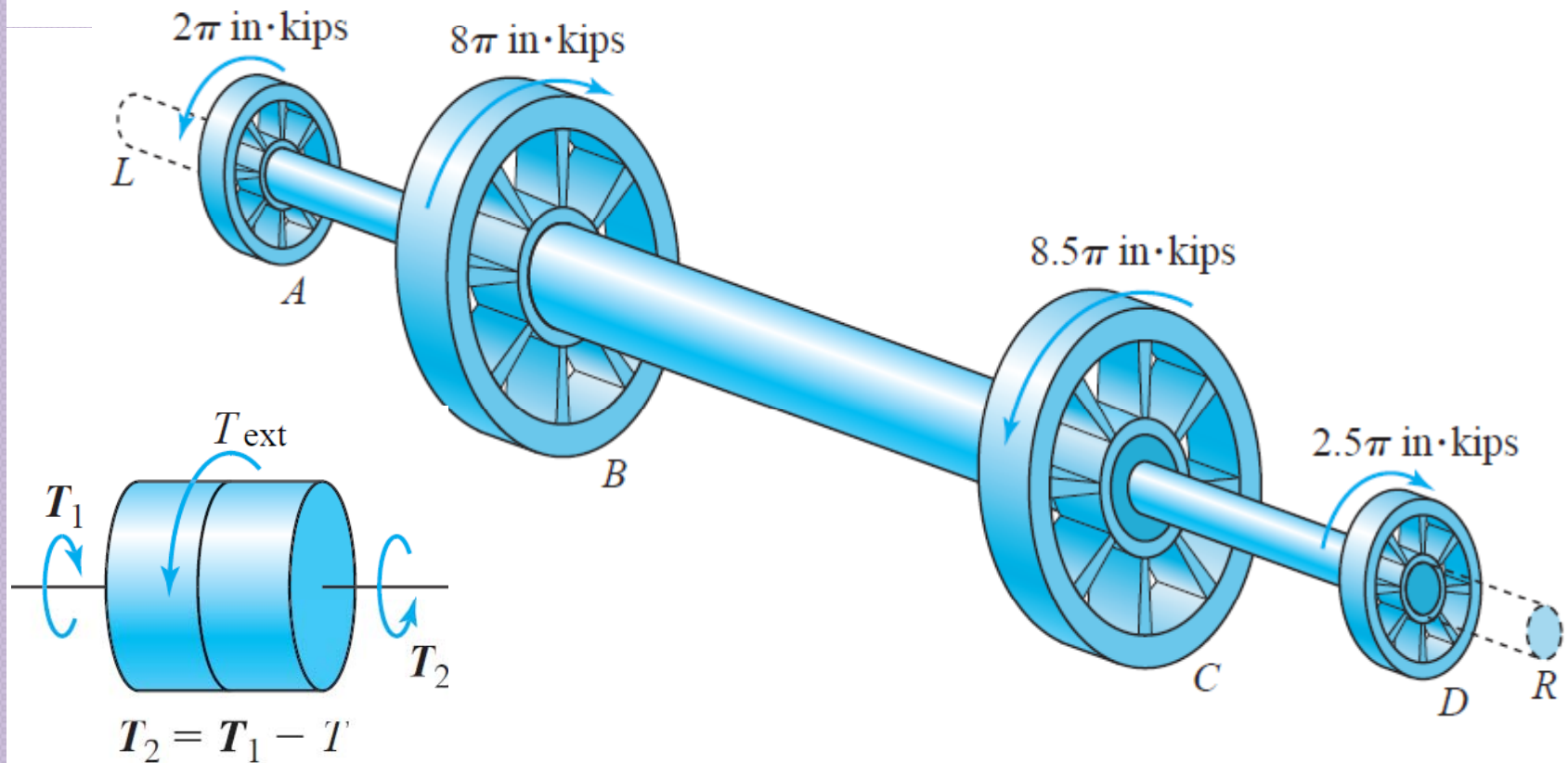
دیاگرام ترک نمایش ترک داخلی در کل طول شافت میباشد. جهت تشخیص جهت صحیح اعمال لنگر پیچشی، یک «الگوی پیچشی» تعریف میگردد که جزء بسیار کوچکی از عضو میباشد که با زدن مقاطع فرضی در طرفین لنگر پیچشی خارجی مفروض بدست می آید. در شکل زیر دو «الگوی پیچشی» و رابطه لنگر خارجی مربوطه نشان داده شده است. چنانچه حین حل مسئله، لنگر خارجی هم جهت با «الگوی پیچشی» باشد، مقدار T_2 محاسبه میگردد؛ در غیر اینصورت، T_2 با تغییر علامت T_{ext} در روابط بدست می آید (شکل سمت راست).



فصل پنجم - پیچش میله ها

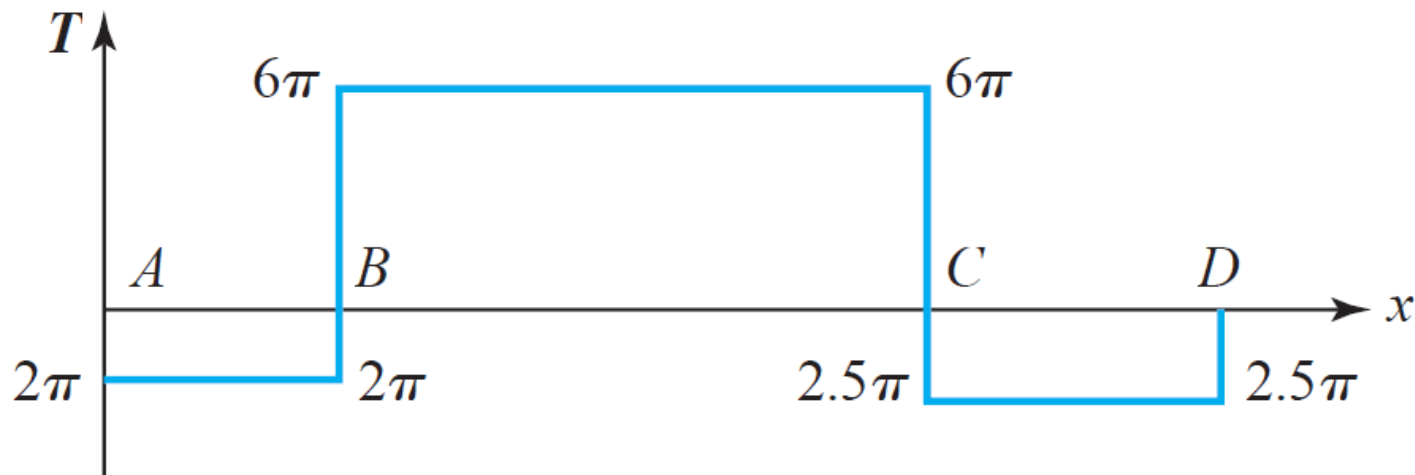
مثال (۵-۶) دوران نقطه D را نسبت به نقطه A با رسم نمودار پیچش محاسبه نمایید؟

حل: میتوان هر یک از الگوهای پیچشی نشان داده شده را انتخاب نمود و نمودار پیچش را رسم نمود که در اینجا شکل سمت چپ انتخاب شده است. در انتهای چپ شفت یک امتداد فرضی (LA) در نظر گرفته میشود. واضح است که مقدار پیچش داخلی در این مقطع صفر است $(T_1=0)$. پیچش نقطه A با الگوی فرضی هم جهت بوده و بنابراین درست بعد از چرخ A مقدار پیچش $T_2 = -2\pi$ بدست می آید.



فصل پنجم - پیچش میله ها

با استفاده از همین رویکرد برای چرخ B، مقدار $T_1 = -2\pi$ میباشد و مقدار لنگر خارجی 8π میباشد که با اعمال علامت منفی به آن (چون عکس جهت الگو میباشد و یا شکل دوم الگو)، مقدار لنگر پیچشی داخلی درست بعد از چرخ B معادل 6π محاسبه میگردد. به همین ترتیب مقدار ترک داخلی برای سایر چرخها و میله ها نیز محاسبه میگردد و دیاگرام لنگر پیچشی بصورت زیر حاصل میگردد:



$$T_{AB} = -2\pi \text{ in.} \cdot \text{kips} \quad T_{BC} = 6\pi \text{ in.} \cdot \text{kips} \quad T_{CD} = -2.5\pi \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

با استفاده از رابطه زیر میتوان مقدار دوران نسبی مورد نظر را محاسبه نمود:

$$\Delta\phi = \sum_i \frac{T_i \Delta x_i}{G_i J_i}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

$$\phi_D - \phi_A = \frac{T_{AB}(x_B - x_A)}{G_{AB}J_{AB}} + \frac{T_{BC}(x_C - x_B)}{G_{BC}J_{BC}} + \frac{T_{CD}(x_D - x_C)}{G_{CD}J_{CD}}$$
$$= \frac{(-2\pi \text{ in.} \cdot \text{kips})(24 \text{ in.})}{(12,000 \text{ ksi})(\pi/2 \text{ in.}^4)} + \frac{(6\pi \text{ in.} \cdot \text{kips})(60 \text{ in.})}{(12,000 \text{ ksi})(8\pi \text{ in.}^4)} + \frac{(-2.5\pi \text{ in.} \cdot \text{kips})(30 \text{ in.})}{(12,000 \text{ ksi})(\pi/2 \text{ in.}^4)}$$

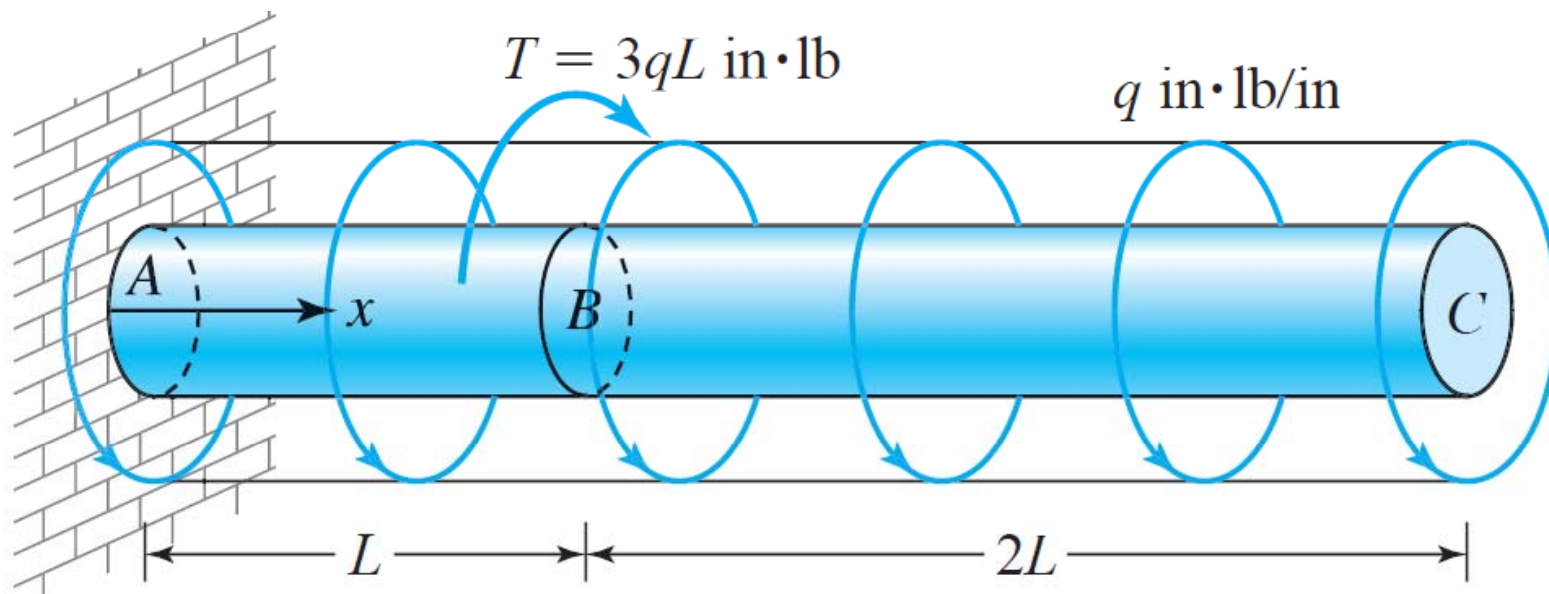
$$\phi_D - \phi_A = 0.01675 \text{ rad cw}$$

از آنجاییکه جهت الگو بصورت پادساعتگرد مثبت فرض شده است و پاسخ عبارت فوق با علامت منفی محاسبه میگردد، بنابراین جهت ترک بصورت ساعتگرد میباشد (Clock Wise).

فصل پنجم - پیچش میله ها

مثال (۷-۵) در شافت شکل زیر که تحت ترک متمرکز و نیز گسترده q در طول خود قرار گرفته است، با فرض مدول برشی G و شعاع r مقدار دوران مقطع C و بیشینه تنش برشی در شافت را تعیین نمایید؟

حل: ابتدا ترک داخلی AB و BC بصورت تابعی از x محاسبه میگردد و سپس دوران نسبی در هر بخش و در کل طول شافت محاسبه میگردد. جهت تعیین مقدار تنش بیشینه نیز دقت نمایید که از آنجاییکه J و ρ_{max} در کل طول شافت ثابت میباشند، تنش ماکزیمم در نقطه با ترک داخلی حداکثر رخ خواهد داد.

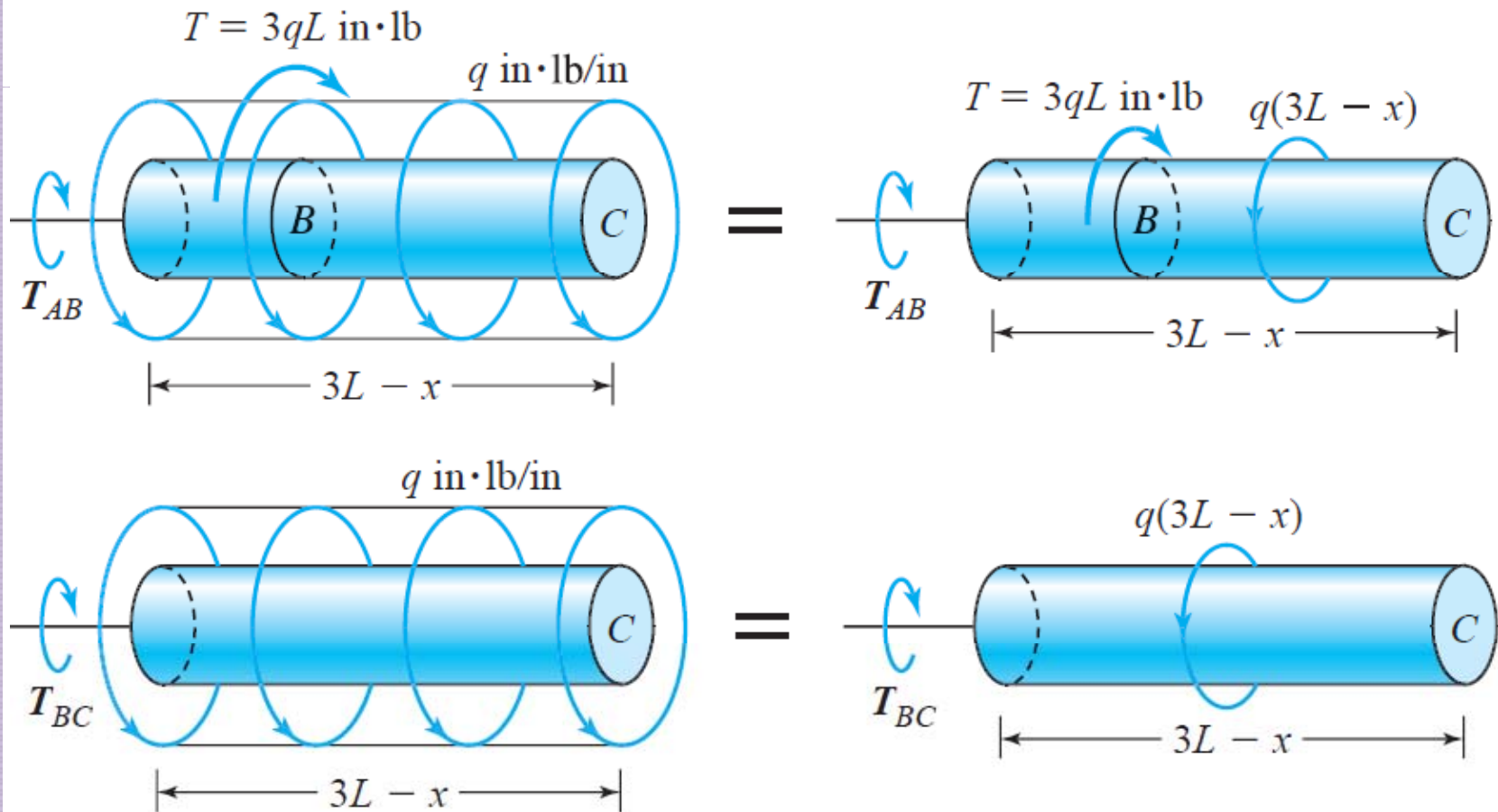


فصل پنجم - پیچش میله ها

با فرض نمودن مقاطع مجازی و جایگزین نمودن لنگر گسترده با لنگر متمرکز معادل آن، مقادیر ترکهای داخلی بصورت زیر محاسبه میگردند:

$$T_{AB} + 3qL - q(3L - x) = 0 \quad \text{or} \quad T_{AB} = -qx$$

$$T_{BC} - q(3L - x) = 0 \quad \text{or} \quad T_{BC} = q(3L - x)$$



فصل پنجم - پیش میله ها

با انتگرال گیری در هر مقطع دوران نسبی هر بخش در انتهای آن مشخص می‌گردد:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{AB} = \frac{T_{AB}}{G_{AB}J_{AB}} = \frac{-qx}{G\pi r^4/2} \longrightarrow \int_{\phi_A}^{\phi_B} d\phi = -\int_{x_A=0}^{x_B=L} \frac{2qx}{G\pi r^4} dx$$

$$\phi_B - \phi_A = -\frac{qx^2}{G\pi r^4} \Big|_0^L = -\frac{qL^2}{G\pi r^4}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{BC} = \frac{T_{BC}}{G_{BC}J_{BC}} = \frac{q(3L-x)}{G\pi r^4/2} \longrightarrow \int_{\phi_B}^{\phi_C} d\phi = \int_{x_B=L}^{x_C=3L} \frac{2q(3L-x)}{G\pi r^4} dx$$

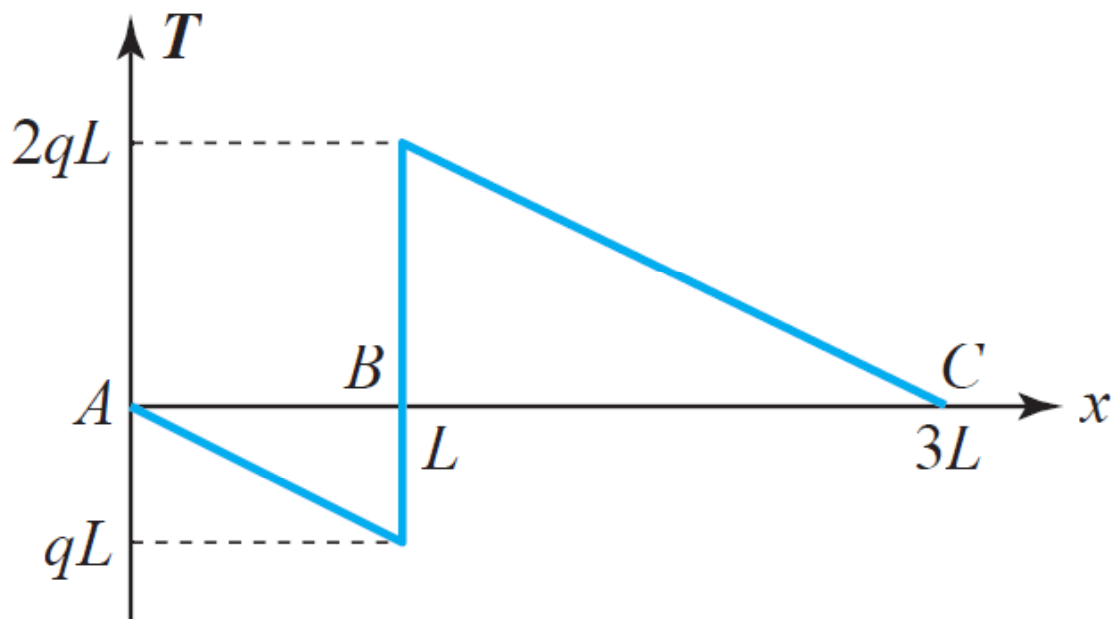
$$\phi_C - \phi_B = \frac{2q}{G\pi r^4} \left(3Lx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_L^{3L}$$

$$\frac{2q}{G\pi r^4} \left[9L^2 - \frac{(3L)^2}{2} - 3L^2 + \frac{L^2}{2} \right] = \frac{4qL^2}{G\pi r^4}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

$$\phi_C - \phi_A = -\frac{qL^2}{G\pi r^4} + \frac{4qL^2}{G\pi r^4} = \left(\frac{3qL^2}{G\pi r^4}\right)_{\text{ccw}}$$

حال با رسم دیاگرام نیروی داخلی میتوان تنش برشی ماکزیمم را نیز محاسبه نمود:



$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \rho_{max}}{J} = \frac{(2qL)(r)}{\pi r^4 / 2}$$

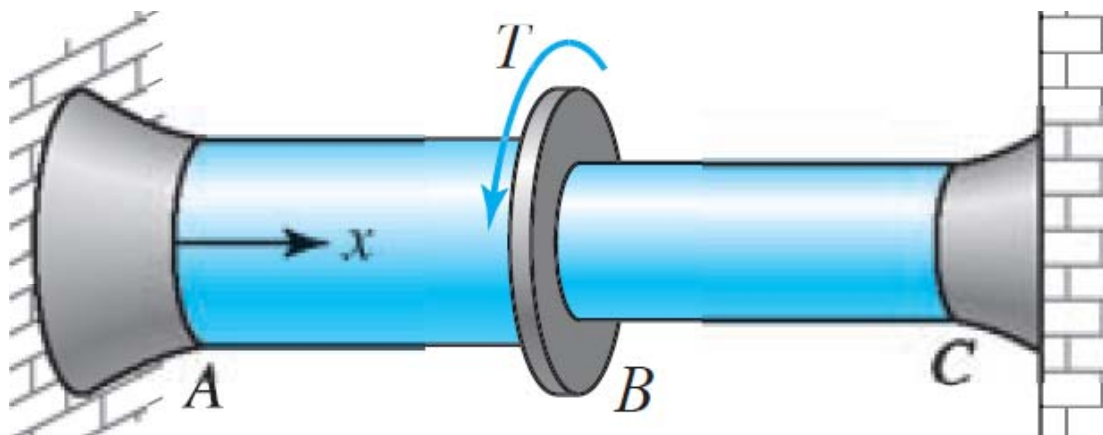
$$\tau_{max} = \frac{4qL}{\pi r^3}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

(۳) شفتهای نامعین استاتیکی

در این بخش همانند مباحث اشاره شده در مسائل نامعین استاتیکی در مؤلفه محوری، با استفاده از روابط تعادل و همچنین روابط همسازی مسئله حل میگردد.

شکل زیر یک شافت را نمایش میدهد که در دو انتهای آن دو واکنش تکیه گاهی بصورت پیچش ظاهر خواهد شد، حال آنکه فقط یک رابطه تعادل برای لنگرها وجود دارد (مجموع کلیه لنگرها در راستای x صفر باشد). درجه نامعینی در این مسئله یک میباشد و بنابراین نیاز به یک رابطه همسازی میباشد. همانطور که از شکل بر می آید، دو انتهای شافت دارای دوران نسبی صفر میباشند.



فصل پنجم - پیش میله ها

مجدداً دو رویکرد کلی در حل این مسائل وجود دارد:

(۱) روش تغییر مکان: میتوان دوران مقاطع را بعنوان مجهول در نظر گرفت و چنانچه ترک در بخشهای متعددی از طول شفت اعمال گردیده است، دوران هر مقطه بعنوان مجهول در نظر گرفته میشود.

(۲) روش نیرو: میتوان هم لنگر واکنش تکیه گاهی را و هم ترکهای داخلی را بعنوان مجهول مد نظر قرار داد. از آنجائیکه درجه نامعینی یک میباشد، ساده ترین روش فرض نمودن واکنش تکیه گاه سمت چپ (یا راست) بعنوان مجهول میباشد. سپس میتوان رابطه همسازی را نیز اضافه نمود.

روند کلی حل مسائل نامعین استاتیکی تحت پیش بصورت زیر میباشد:

(۱) در هر بخش مقطع زده شود و نمودار جسم آزاد با فرض واکنش سمت چپ بعنوان مجهول، رسم گردد. بعلاوه، نمودار لنگر پیشی نیز بر اساس این واکنش محاسبه گردد.

فصل پنجم - پیچش میله ها

(۲) ترک داخلی را بر اساس واکنش مجهول محاسبه نمایید.

(۳) دوران انتهای هر بخش را با استفاده از روابط پیچش و بر حسب واکنش مجهول بدست آورید.

(۴) با جمع نمودن کلیه دورانها، دوران انتهای شفت را نسبت به ابتدای آن محاسبه نموده و برابر صفر قرار دهید.

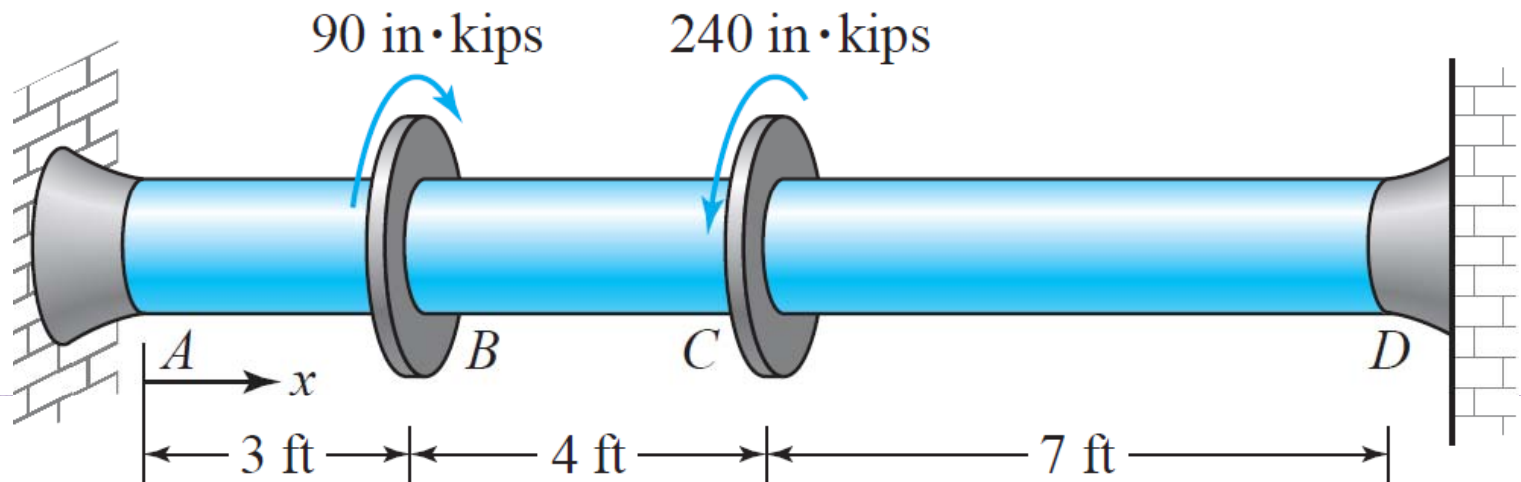
(۵) نیروهای داخلی را میتوان با روابط مرحله دوم بدست آورد و زاویه دوران و تنشها نیز محاسبه گردند.

مثال (۵-۸) شافت فولادی زیر بقطر ۴ اینچ بصورت شکل بارگذاری شده است. تنش برشی حداکثر شافت را محاسبه نمایید؟

حل: با استفاده از روند ارائه شده، مقدار T_A محاسبه میگردد. تنش برشی ماکزیمم نیز در شافت با مقطع ثابت، در مقطع با ترک داخلی بیشینه رخ خواهد داد.

$$G_s = 12,000 \text{ ksi}, E_s = 30,000 \text{ ksi}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها



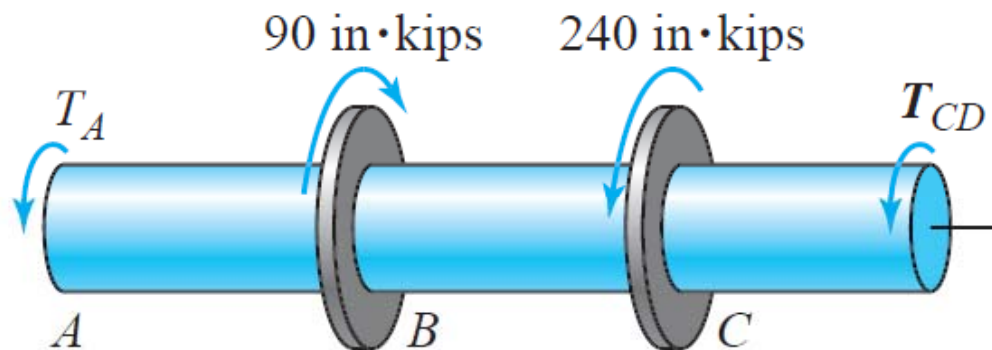
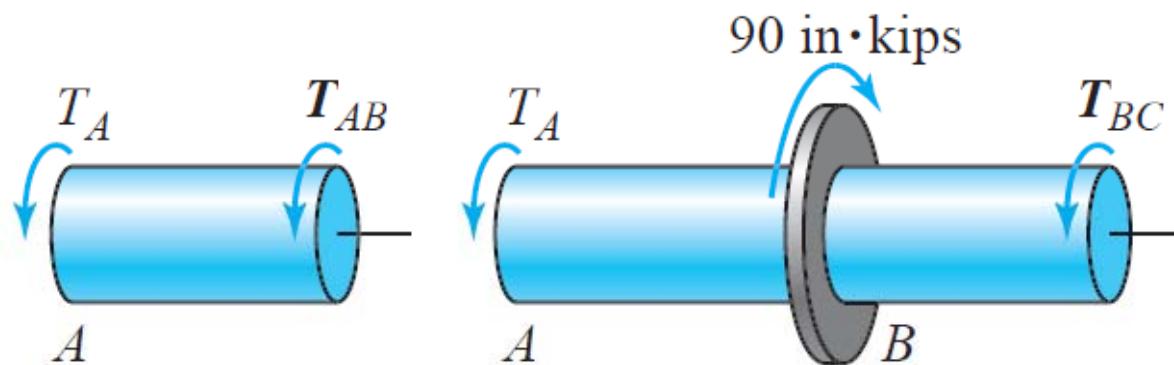
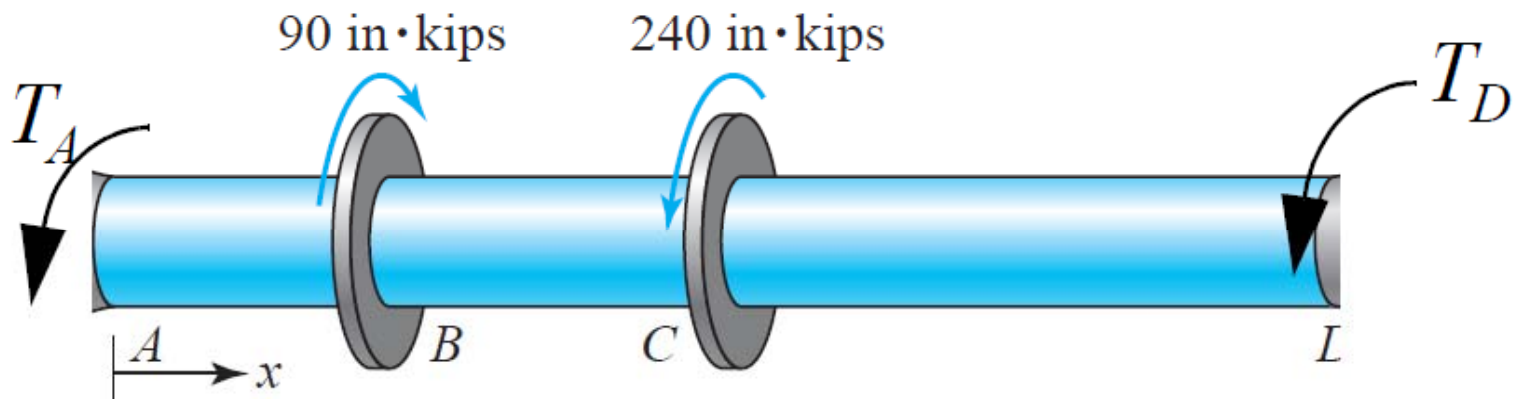
ابتدا ممان اینرسی قطبی و صلبیت پیچشی مقطع محاسبه می‌گردد:

$$J = \frac{\pi(4 \text{ in.})^2}{32} = 25.13 \text{ in.}^4$$

$$GJ = (12000 \text{ ksi})(25.13 \text{ in.}^4) = 301.6(10^3) \text{ kips} \cdot \text{in.}^2$$

گام (۱) نمودار جسم آزاد برای هر بخش محاسبه می‌گردد و لنگر پیچشی A بعنوان واکنش مجهول فرض میشود.

فصل پنجم - پیچش میله ها



فصل پنجم - پیچش میله ها

گام ۲) با استفاده از شکل‌های فوق، ترکهای داخلی بصورت زیر محاسبه میگردند:

$$T_{AB} = -T_A \quad T_{BC} = (-T_A + 90) \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

$$T_{CD} = (-T_A - 150) \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

گام ۳) دوران نسبی در انتهای هر یک از بخشها بصورت زیر میباشد:

$$\phi_B - \phi_A = \frac{T_{AB}(x_B - x_A)}{G_{AB}J_{AB}} = \frac{-T_A(36)}{301.6(10^3)} = -0.1194(10^{-3})T_A$$

$$\phi_C - \phi_B = \frac{T_{BC}(x_C - x_B)}{G_{BC}J_{BC}} = \frac{(-T_A + 90)48}{301.6 \times 10^3} = (-0.1592T_A + 14.32)(10^{-3})$$

$$\phi_D - \phi_C = \frac{T_{CD}(x_D - x_C)}{G_{CD}J_{CD}} = \frac{(-T_A - 150)84}{301.6 \times 10^3} = (-0.2785T_A - 41.78)(10^{-3})$$

گام ۴) با جمع نمودن کلیه دورانهای فوق، دوران انتهای شافت نسبت به ابتدای آن محاسبه میگردد که معادل صفر میباشد:

$$\phi_D - \phi_A = (-0.1194T_A - 0.1592T_A + 14.32 - 0.2785T_A - 41.78) = 0$$

$$T_A = \frac{14.32 - 41.78}{0.1194 + 0.1592 + 0.2785} = -49.28 \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

گام ۵) ترکهای داخلی با جاگذاری واکنش A در روابط مرحله دوم، محاسبه میگردند:

$$T_{AB} = 49.28 \text{ in.} \cdot \text{kips} \quad T_{BC} = 139.28 \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

$$T_{CD} = -100.72 \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

مقدار تنش برشی حداکثر نیز در عضو BC محاسبه میگردد:

$$\tau_{max} = \frac{T_{BC}(\rho_{BC})_{max}}{J_{BC}} = \frac{(139.3 \text{ in.} \cdot \text{kips})(2 \text{ in.})}{25.13 \text{ in.}^4}$$

$$\tau_{max} = 11.1 \text{ ksi}$$

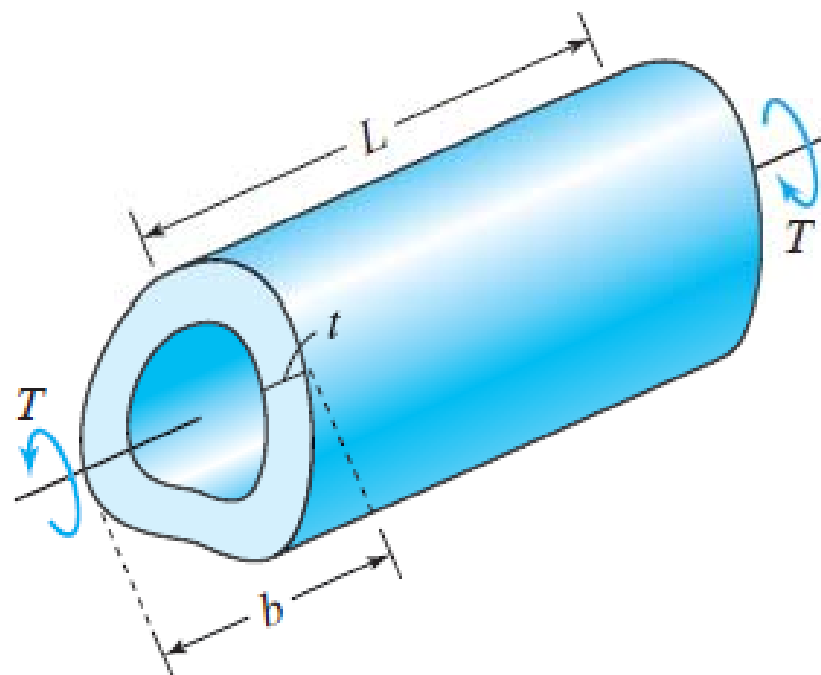
فصل پنجم - پیچش میله ها

۴) پیچش مقاطع جدار نازک

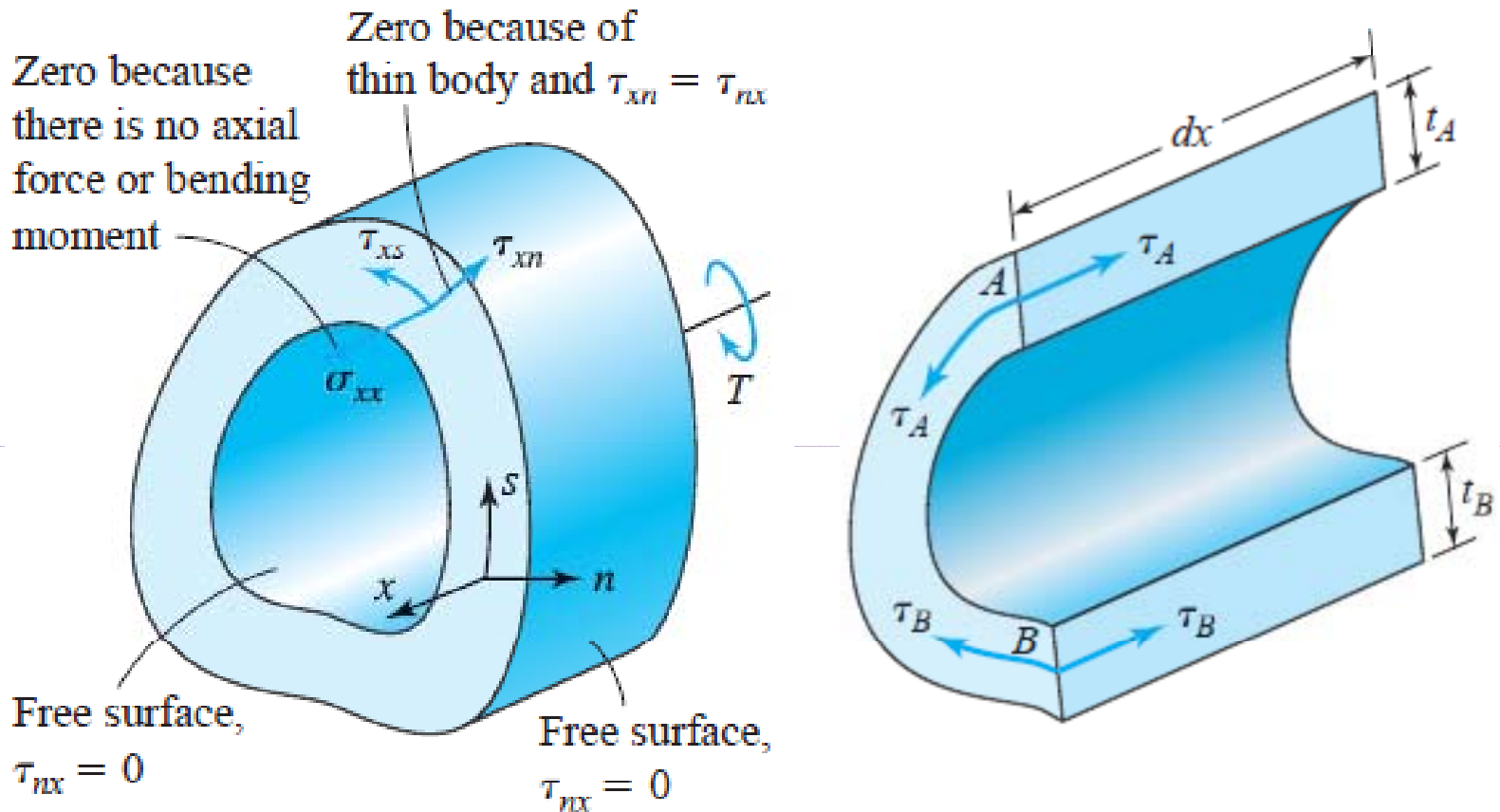
باهای هواپیما و پوسته ساختمانهای بلند مرتبه از جمله موارد کاربرد مقاطع جدار نازک میباشد که میتوان این اجسام را بصورت یک تیوب نازک تحلیل نمود. منظور از «نازک» این است که ضخامت مقطع بیش از ۱۰ برابر از بزرگترین بعد مقطع کوچکتر باشد و منظور از «تیوب» این است که بزرگترین بعد مقطع بیش از ۱۰ برابر از طول مقطع کوچکتر باشد. فرض نمایید که تیوب مفروض فقط تحت پیچش میباشد.

$$b > 10t$$

$$L > 10b$$



فصل پنجم - پیچش میله ها



همانطور که از شکل‌های فوق بر می آید تنش برشی در دو سطح آزاد برابر صفر می‌باشد و بدلیل تقارن تنش برشی، تنش برشی عمود بر ضخامت نیز صفر خواهد بود. از آنجاییکه از نیروی محوری و لنگر خمشی نیز صرف‌نظر شده است، تنش نرمال نیز معادل صفر می‌باشد و بنابراین فقط تنش برشی در راستای S باقی میماند که بدلیل تیوب بودن، میتوان آنرا در ضخامت ثابت فرض نمود.

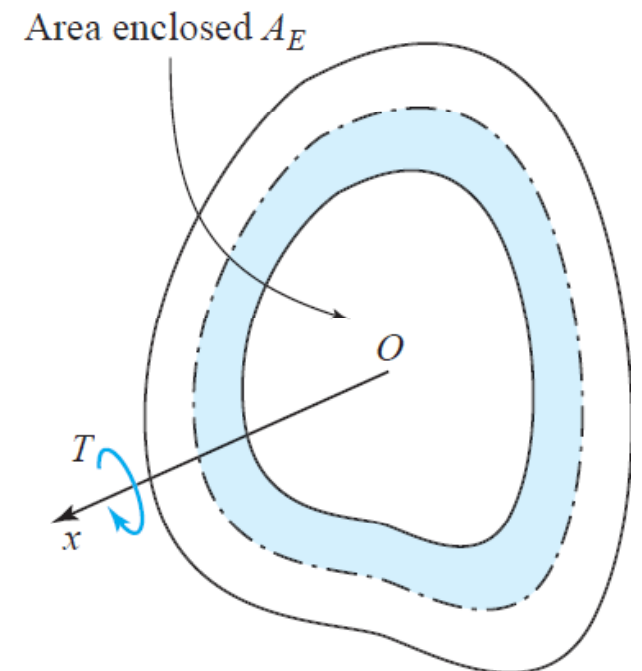
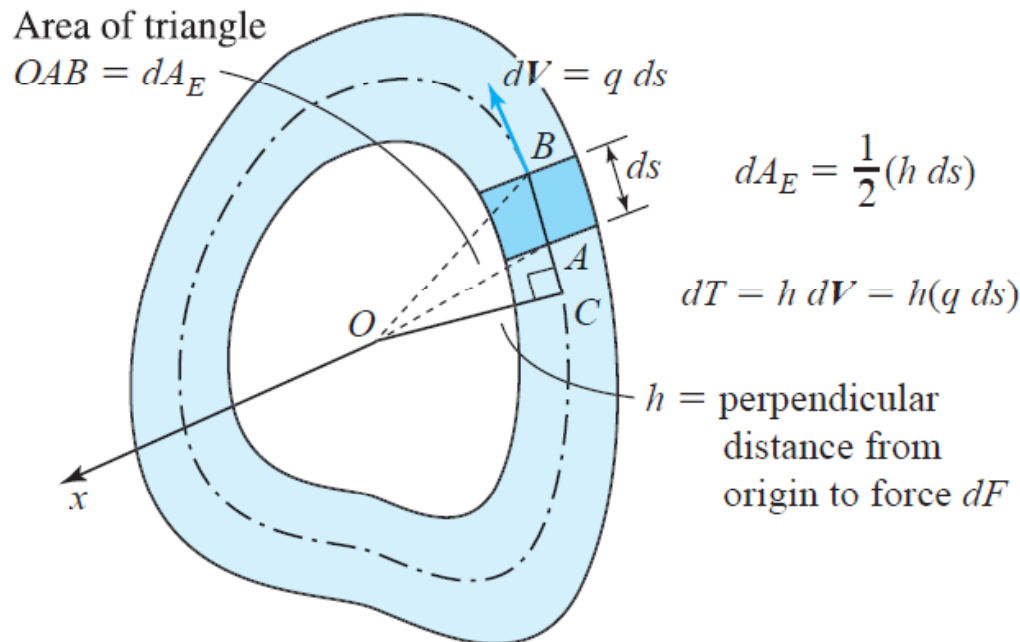
فصل پنجم - پیچش میله ها

شکل زیر نمودار جسم آزاد یک جزء المان را نمایش میدهد. با نوشتن تعادل نیرو در راستای X خواهیم داشت:

$$\tau_A(t_A dx) = \tau_B(t_B dx)$$

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$

$$q_A = q_B$$



فصل پنجم - پیچش میله ها

عبارت $q = \tau_{xs}t$ جریان برش نام دارد که و واحد آن نیرو بر طول میباشد. از رابطه فوق بر می آید که جریان برش در مقطع فرضی ثابت است. همانطور که از شکل فوق بر می آید میتوان تنش برشی (جریان برش) را با یک ترک جایگزین نمود. خط OC عمود بر جهت اعمال نیروی dV (راستای مماس بر قوس در هر نقطه) میباشد. با علم بر ثابت بودن جریان برش، میتوان آنرا از انتگرال خارج نمود:

$$T = \oint dT = \oint q(h ds) = q \oint 2 dA_E = 2qA_E$$

$$q = \frac{T}{2A_E}$$



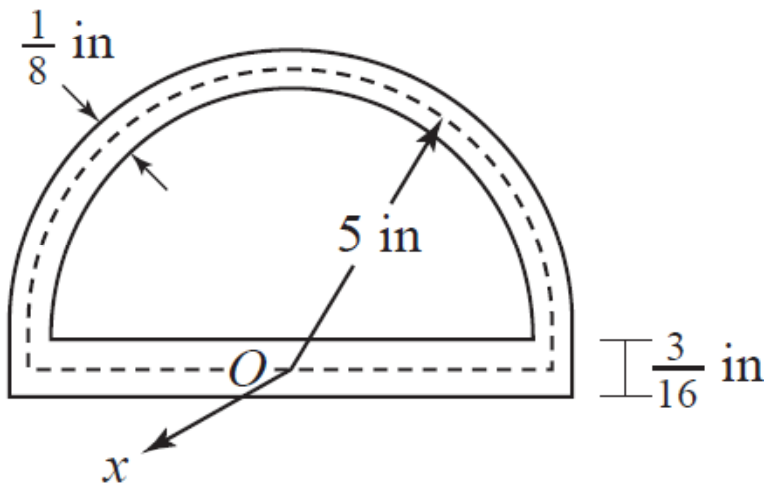
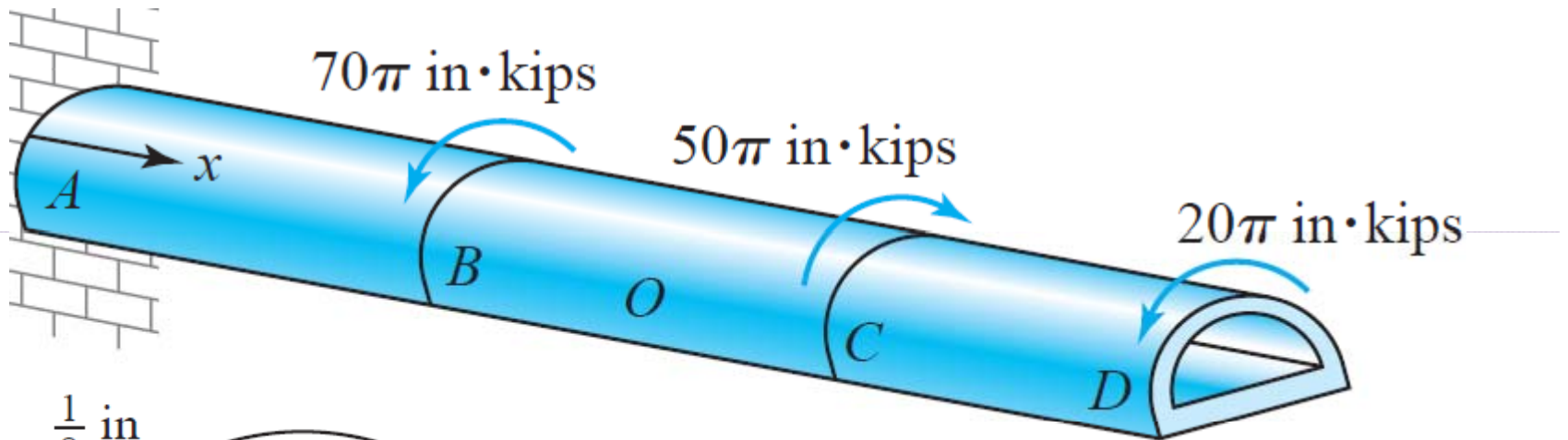
$$\tau_{xs} = \frac{T}{2tA_E}$$

مثال (۹-۵) شافت شبه دایره ای زیر تحت یک لنگر پیچشی خارجی مطابق شکل واقع شده است. بیشینه تنش برشی پیچشی در تیوب و در نقطه O را تعیین نمایید؟

حل: با استفاده از روند ارائه شده، مقدار T_A محاسبه میگردد. تنش برشی ماکزیمم نیز در شافت با مقطع ثابت، در مقطع با ترک داخلی بیشینه رخ خواهد داد.

فصل پنجم - پیچش میله ها

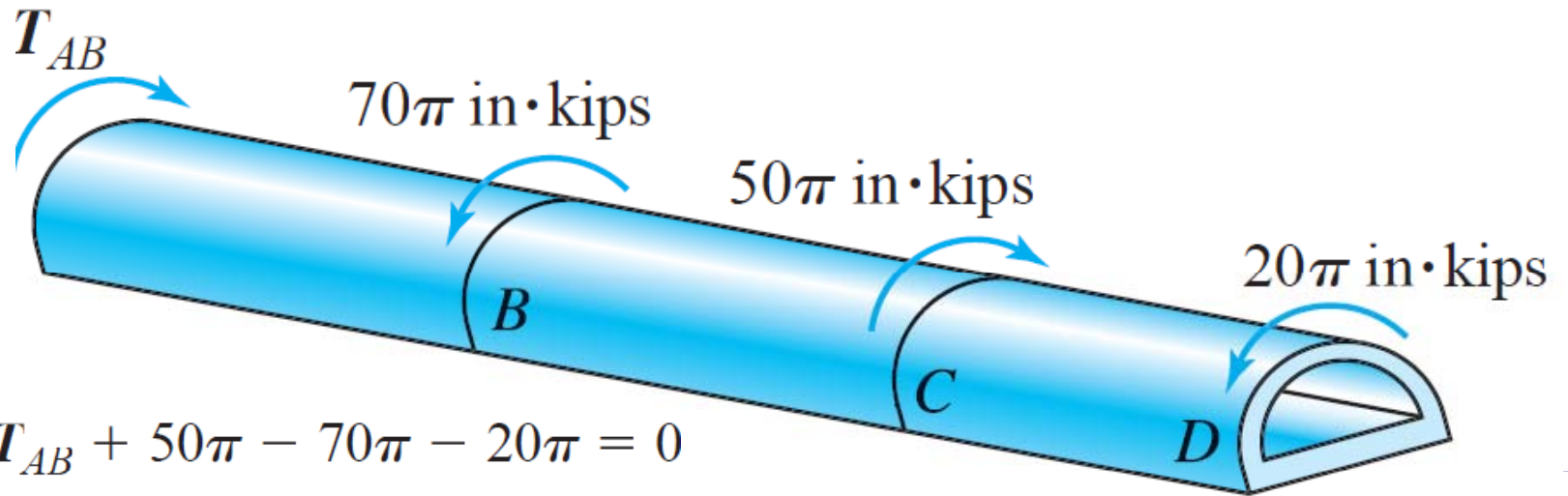
حل: با استفاده از روابط ارائه شده در محاسبه تنش برشی ناشی از پیچش، بیشینه تنش برشی در مقطعی با بیشینه ترک داخلی و کمترین ضخامت رخ میدهد. بنابراین با مقطع زدن در بخشهای مختلف شفت و رسم نمودار جسم آزاد خواهیم داشت:



Cross section

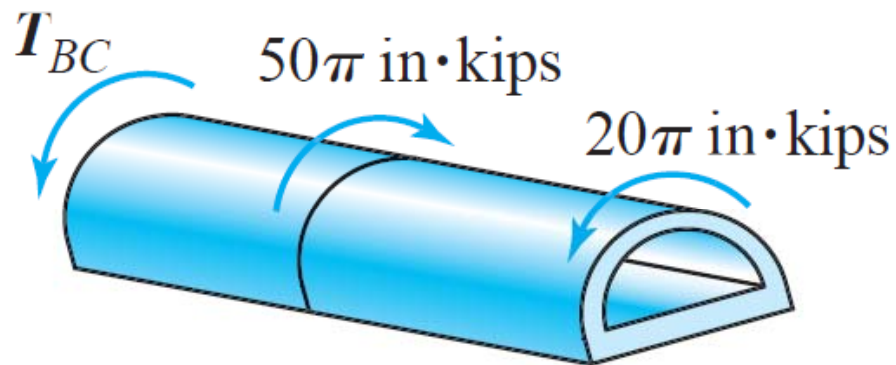
$$\tau_{xs} = \frac{T}{2tA_E}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها



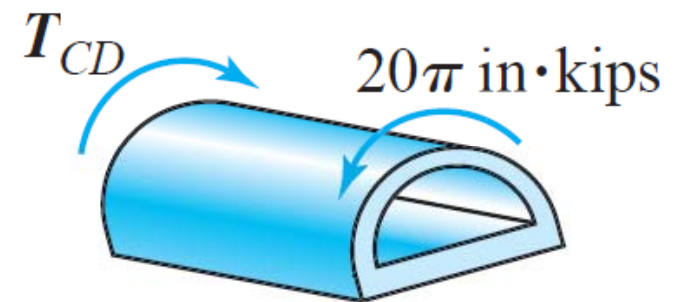
$$T_{AB} + 50\pi - 70\pi - 20\pi = 0$$

$$T_{AB} = 40\pi \text{ in}\cdot\text{kips}$$



$$-T_{BC} + 50\pi - 20\pi = 0$$

$$T_{BC} = 30\pi \text{ in}\cdot\text{kips}$$



$$T_{CD} - 20\pi = 0$$

$$T_{CD} = 20\pi \text{ in}\cdot\text{kips}$$

فصل پنجم - پیچش میله ها

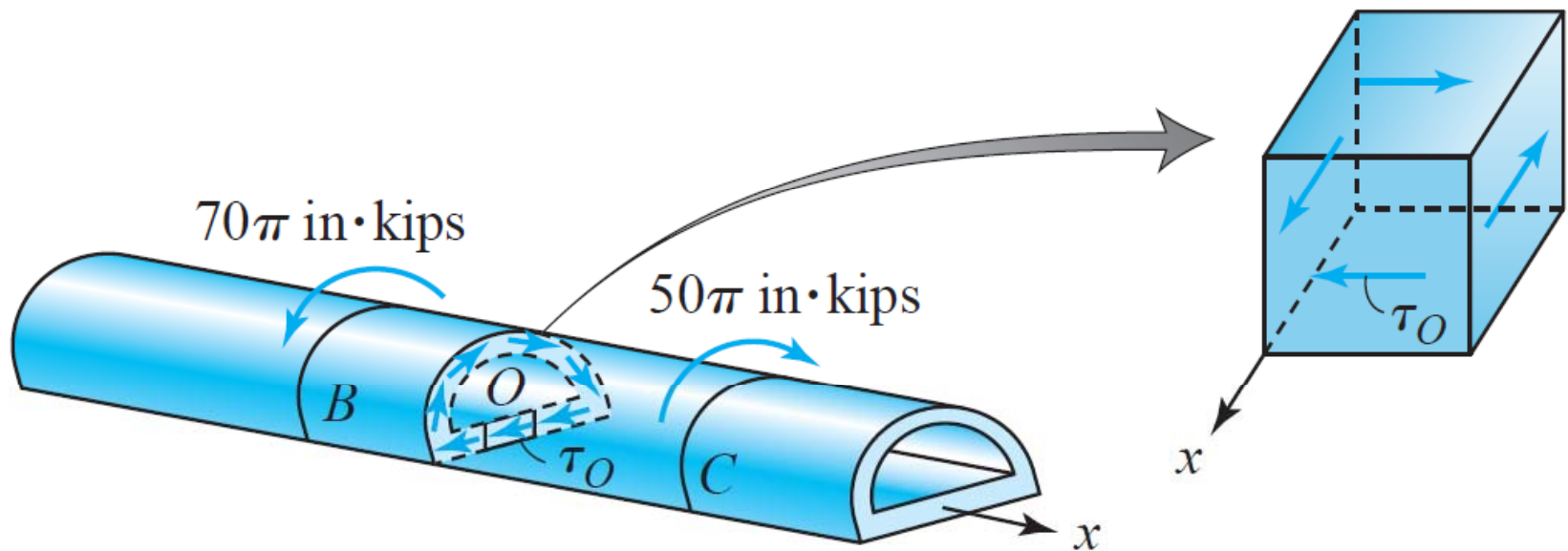
پیچش حداکثر در تیوب در AB میباشد و کمترین ضخامت نیز معادل 1/8 اینچ. در نقطه O نیز ترک خارجی معادل TBC بوده و ضخامت نیز 3/16 اینچ میباشد. مقادیر تنشهای ماکزیمم و در نقطه مذکور بصورت زیر میباشد:

$$A_E = \pi(5 \text{ in.})^2 / 2 = 12.5\pi \text{ in.}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{(40\pi \text{ in.} \cdot \text{kips})}{(12.5\pi \text{ in.}^2)(\frac{1}{8} \text{ in.})} = 25.6 \text{ ksi}$$

$$\tau_O = \frac{(30\pi \text{ in.} \cdot \text{kips})}{(12.5\pi \text{ in.}^2)(\frac{3}{16} \text{ in.})}$$

$$\tau_O = 12.8 \text{ ksi}$$





فصل ششم:

خمش متقارن تیرها

فصل ششم - خمش متقارن تیر

بخشهای اصلی

(۱) مقدمه ای بر تئوری پیچش

(۲) تئوری خمش متقارن تیر

(۳) تعادل لنگر و برش

(۴) نمودار لنگر و برش

(۵) تنش برشی در تیرهای متقارن نازک

هدف:

درک تئوری، محدودیتهای و کاربرد تئوری خمش متقارن تیرها و استفاده از مفاهیم آن در طراحی بروش مقاومت تجسم صحیح تنشهای نرمال و برشی و سطوحی که تنشها برا آنها اعمال میشوند

فصل ششم - خمش متقارن تیر

(۱) مقدمه ای بر تئوری خمش متقارن تیرها

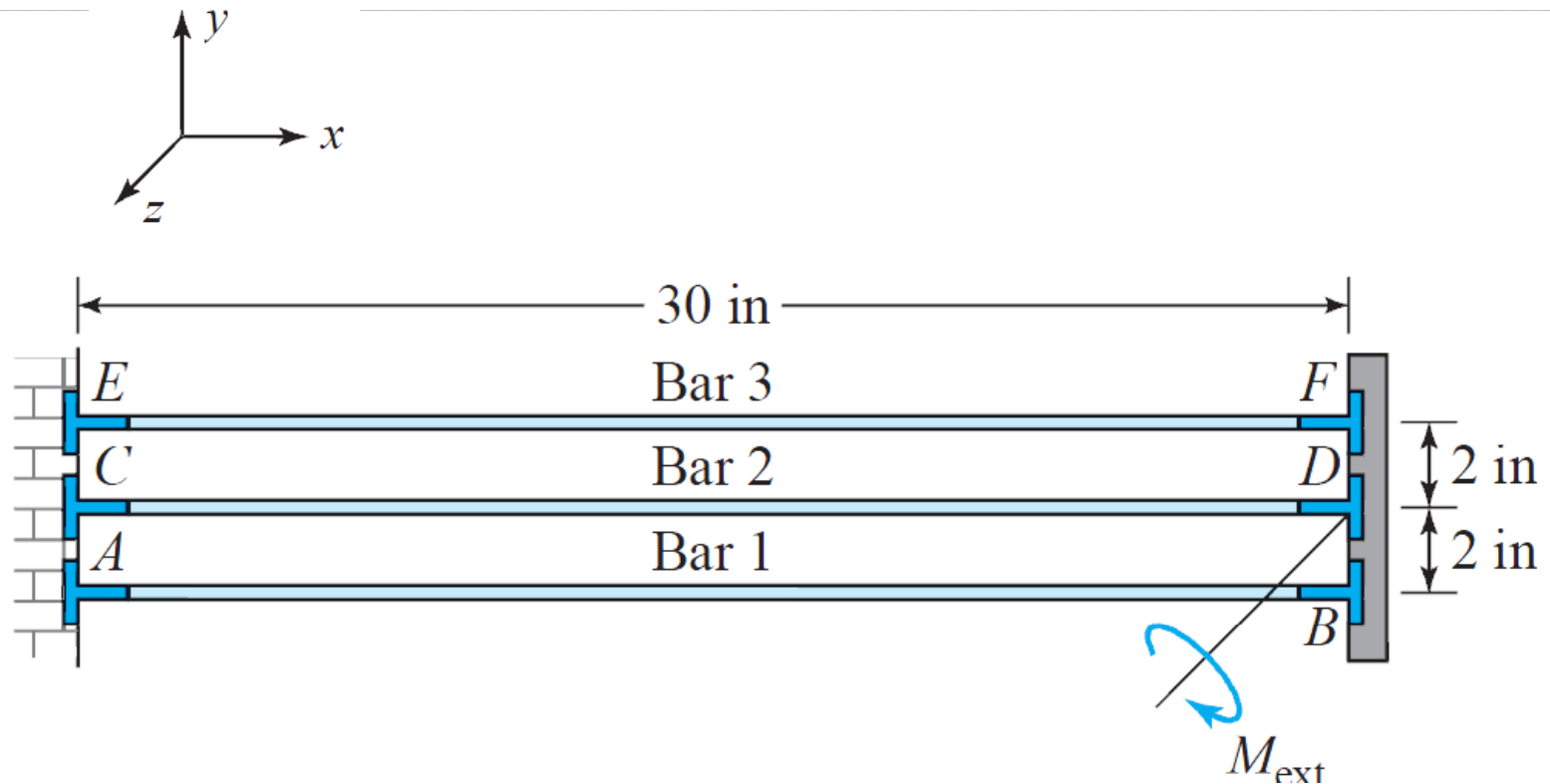
کدامیک از اعضای سازه را میتوان تیر نامید؟ شکلهای زیر یک قفسه کتاب با طول خیلی بزرگتر از عرض یا ضخامت آنرا نشان میدهد که کتابها بار قائم بر آن اعمال مینمایند. همچنین یک پل بزرگراه را که شاهتیر طویل آن وزن اعضای پل و وسایل روی آنرا به پایه ها منتقل مینماید و مجدداً وزن و بارها بصورت قائم بر آن اعمال میگرددند. این اعضا را میتوان بصورت تیر مدل نمود چراکه دارای طول خیلی بیشتر از عرض و ضخامت و نیز دارای بار عمود بر محور خود میباشند. قاب یک ماشین و یا اعضای که سقف بر آنها مینشینند و ... جزء تیرها میباشند.



فصل ششم - خمش متقارن تیر

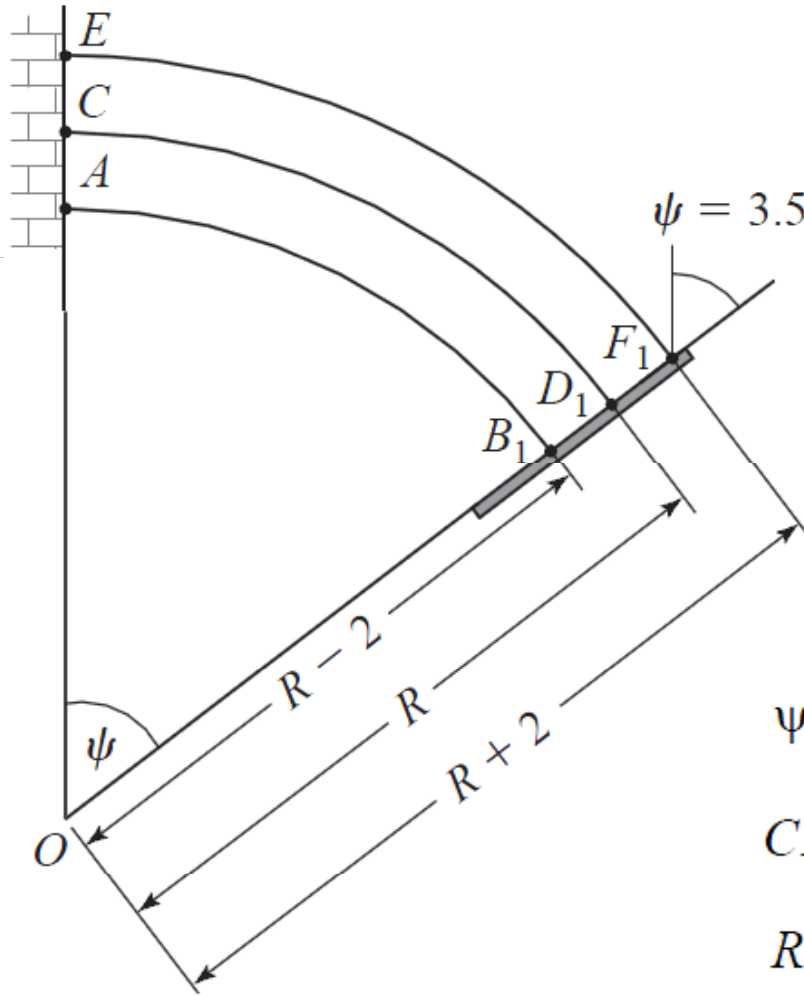
در ادامه جهت درک بهتر بحث خمش و مفاهیم اولیه آن، یک مثال ارائه می‌گردد.

مثال (۱-۶) انتهای سمت چپ سه میله زیر در یک دیوار صلب محکم شده اند و انتهای دیگر آنها به یک صفحه صلب متصل می‌باشد. میله های تغییرشکل نیافته مستقیم بوده قائم بر دیوار می‌باشند. چنانچه صفحه انتهای تحت لنگر اعمال شده $3/5$ درجه دوران نماید، و تنش نرمال میله ۲ برابر صفر باشد، تنش نرمال در میله های ۱ و ۳ را تعیین نمایید.



فصل ششم - خمش متقارن تیر

حل: با در نظر گرفتن تغییر شکل دایره ای تیر، و با علم بر ثابت بودن طول قوس CD_1 به اندازه 30 اینچ (زیرا کرنشی را تحمل نمی‌نماید)، میتوان زوایه قوس CD را به طول آن و شعاع دایره مرتبط نمود. سپس با داشتن مقادیر شعاعهای داخلی و خارجی، طول قوسهای نظیر محاسبه میگردد و با استفاده از آن کرنشها.



$$\psi = \left(\frac{3.5^\circ}{180^\circ} \right) (3.142 \text{ rad}) = 0.0611 \text{ rad}$$

$$CD_1 = R\psi = 30 \text{ in.}$$

$$R = 491.1 \text{ in}$$

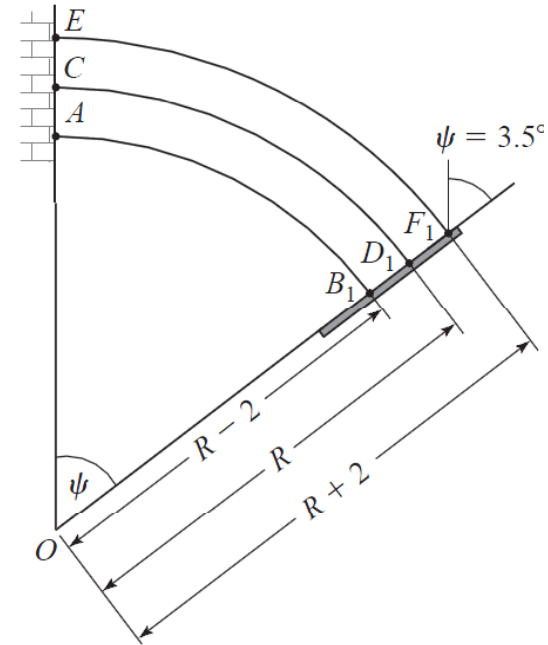
فصل ششم - خمش متقارن تیر

$$AB_1 = (R - 2)\psi = 29.8778 \text{ in.}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{AB_1 - AB}{AB} = \frac{-0.1222 \text{ in.}}{30 \text{ in.}} = -0.004073 \text{ in./in.}$$

$$EF_1 = (R + 2)\psi = 30.1222 \text{ in.}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{EF_1 - EF}{EF} = \frac{0.1222 \text{ in.}}{30 \text{ in.}} = 0.004073 \text{ in./in.}$$

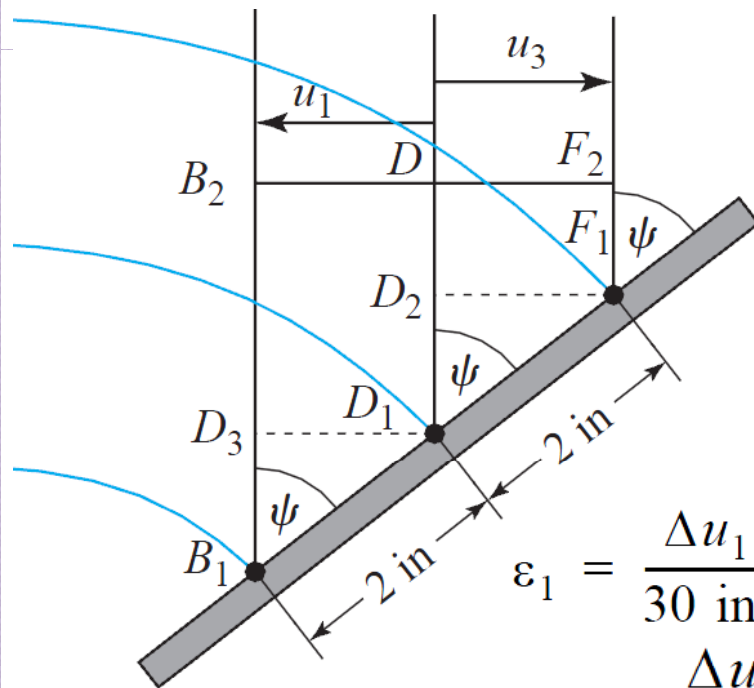


فصل ششم - خمش متقارن تیر

روش حل دوم: میتوان از فرض کرنشهای کوچک استفاده نموده و مؤلفه تغییرشکل افقی را برای دو میله ۱ و ۳ محاسبه نمود. در پایان کرنش برشی محاسبه میگردد.

$$\Delta u_3 = DF_2 = D_2F_1 = D_1F_1 \sin \psi \approx 2\psi = 0.1222 \text{ in.}$$

$$\Delta u_1 = B_2D = D_3D_1 = B_1D_1 \sin \psi \approx 2\psi = 0.1222 \text{ in}$$



$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u_1}{30 \text{ in.}} = \frac{-0.1222 \text{ in.}}{30 \text{ in.}} = -0.004073 \text{ in./in}$$

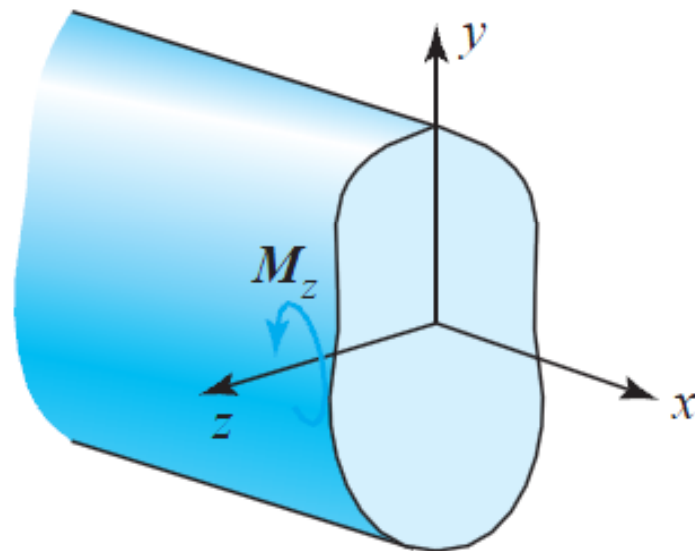
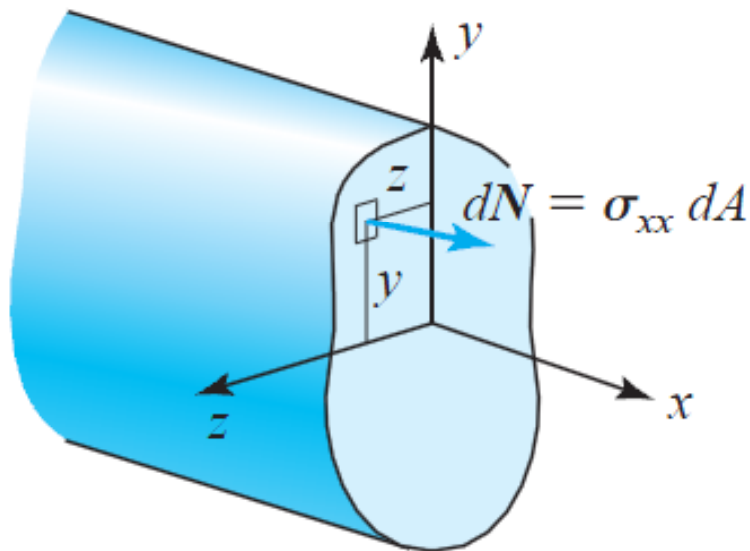
$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta u_3}{30 \text{ in.}} = \frac{0.1222 \text{ in.}}{30 \text{ in.}} = 0.004073 \text{ in./in.}$$

فصل ششم - خمش متقارن تیر

۱-۱ لنگر خمشی داخلی

با توجه به شکل زیر، میتوان تنشهای نرمال یک مقطع را با لنگر خمشی جایگزین نمود. در شکل زیر، Y موقعیت تنش نرمال میباشد که با استفاده از تعادل استاتیکی خواهیم داشت:

$$M_z = -\int_A y \sigma_{xx} dA$$



فصل ششم - خمش متقارن تیر

شکل سمت چپ بالا، جایگزینی تنشهای محوری را با یک لنگر خمشی به همراه نیروی محوری (N) نشان میدهد. اما بر مبنای خمش متقارن، تنشهای نرمال حول محوری تقارن (Y) متقارن بوده و بنابراین خمش حول این محوری برابر صفر میباشد. بعلاوه مطلوب ما در تئوری خمش متقارن این است که خمش بتنهایی و بدور از نیروی محوری مورد بررسی قرار گیرد، بنابراین شرط تحمیلی ما به مسئله بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_A \sigma_{xx} dA = 0$$

بر این اساس، مجموع تنشهای کششی و فشاری اعمال شده بر سطح برابر صفر خواهد بود و در نتیجه نیروی محور مقطع نیز معادل صفر میباشد. باین ترتیب محوری باید وجود داشته باشد که جهت تنشهای فشاری به کششی تبدیل گردد و در آن محوری تنشها صفر هستند. به این محور «محور خنثی» گفته میشود.

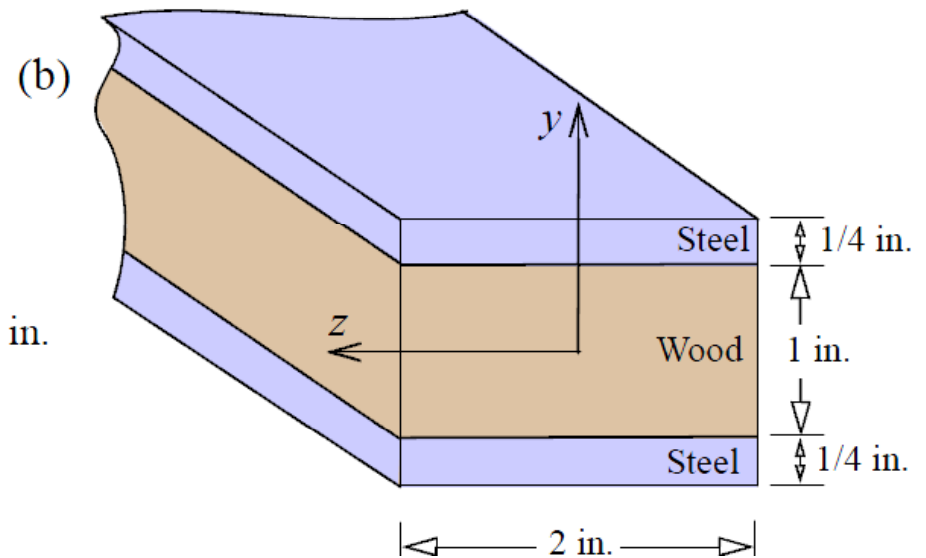
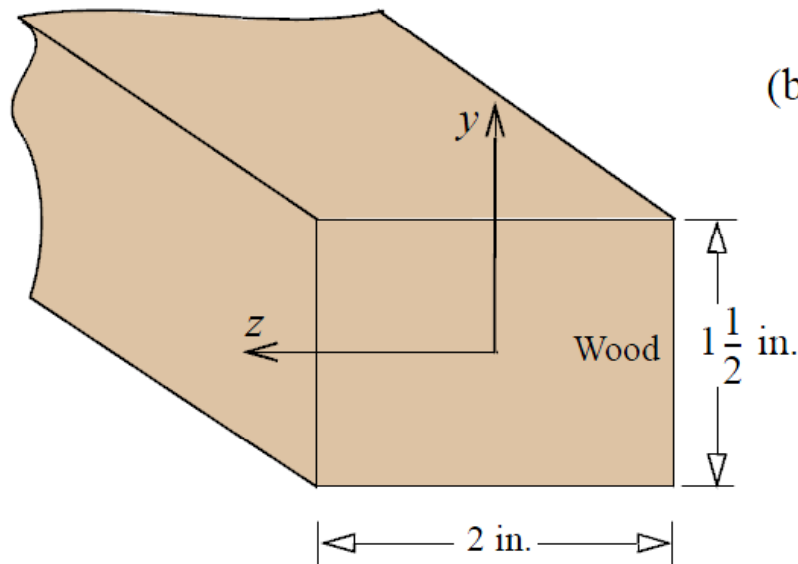
فصل ششم - خمش متقارن تیر

مثال (۶-۲) شکل زیر یک مقطع چوبی و نیز مقطع چوبی مسلح شده با فولاد را نشان میدهد. تنش نرمال هر دو مقطع بصورت رابطه داده شده تغییر مینماید. رابطه تنش نرمال و توزیع آنرا در هر یک از مقاطع زیر محاسبه نموده و لنگر داخلی معادل را نیز بدست آورید؟

$$\epsilon_{xx} = -200y \mu$$

$$E_{\text{steel}} = 30,000 \text{ ksi}$$

$$E_{\text{wood}} = 8000 \text{ ksi}$$



فصل ششم - خمش متقارن تیر

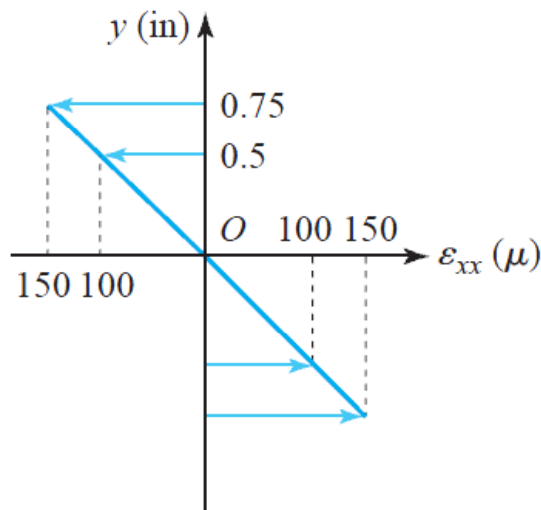
حل: با استفاده از قانون هوک داریم:

$$(\sigma_{xx})_{\text{wood}} = (8000 \text{ ksi})(-200y)10^{-6} = -1.6y \text{ ksi}$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{steel}} = (30000 \text{ ksi})(-200y)10^{-6} = -6y \text{ ksi}$$

$$\sigma_{xx} = -1.6y \text{ ksi} \quad -0.75 \text{ in.} \leq y < 0.75 \text{ in.} \quad \text{تنش در مقطع همگن:}$$

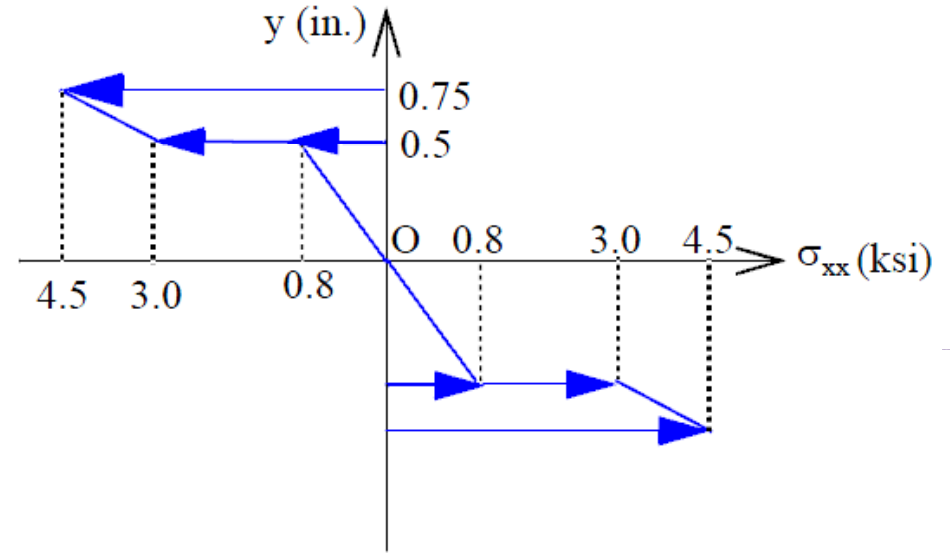
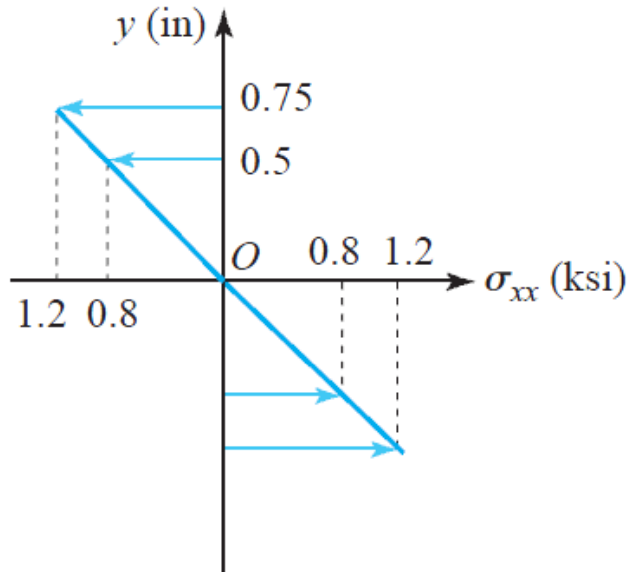
$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -6y \text{ ksi} & 0.5 \text{ in.} < y \leq 0.75 \text{ in.} \\ -1.6y \text{ ksi} & -0.5 \text{ in.} < y < 0.5 \text{ in.} \\ -6y \text{ ksi} & -0.75 \text{ in.} \leq y < -0.5 \text{ in.} \end{cases} \quad \text{تنش در مقطع ناهمگن:}$$



دیاگرام توزیع کرنش در مقطع:

فصل ششم - خمش متقارن تیر

دیاگرام توزیع کرنش در دو مقطع همگن و ناهمگن:



جهت محاسبه لنگر معادل داخلی میتوان بجای عرض مقدار ۲ اینچ را جایگزین نمود؛ بعلاوه با توجه به توزیع متقارن تنش خواهیم داشت:

$$dA = 2dy$$

$$M_z = -\int_{-0.75}^{0.75} y\sigma_{xx}(2dy) = -2\left[\int_0^{0.75} y\sigma_{xx}(2dy)\right]$$

فصل ششم - خمش متقارن تیر

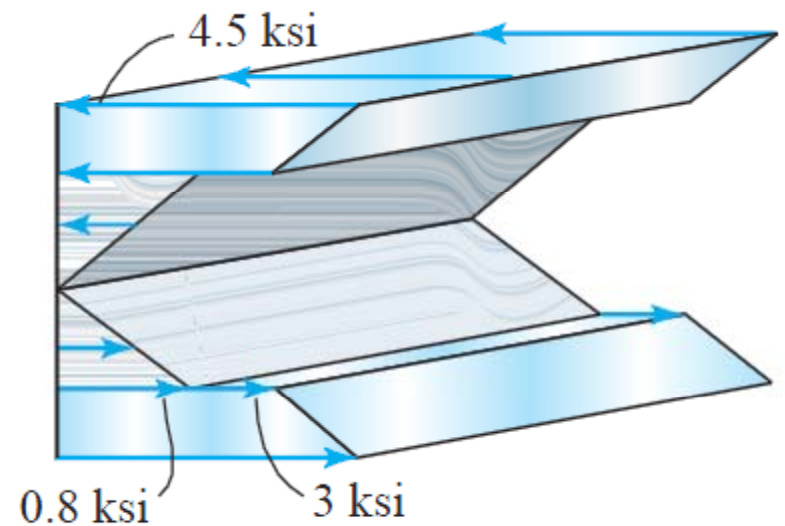
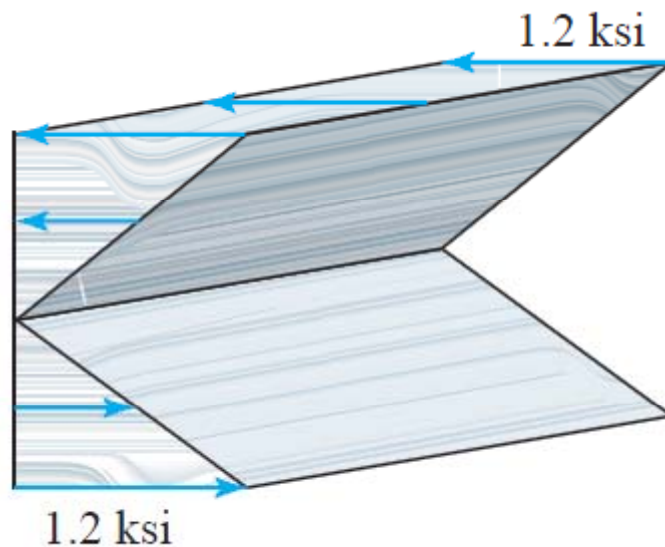
$$M_z = -2 \left[\int_0^{0.75} y(-1.6y \text{ ksi})(2 dy) \right] = 6.4 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{0.75} = 6.4 \frac{0.75^3}{3} \quad \text{مقطع همگن:}$$

$$M_z = 0.9 \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

$$M_z = -2 \left[\int_0^{0.5} y(-1.6y)(2 dy) + \int_{0.5}^{0.75} y(-6y)(2 dy) \right] = \quad \text{مقطع ناهمگن:}$$

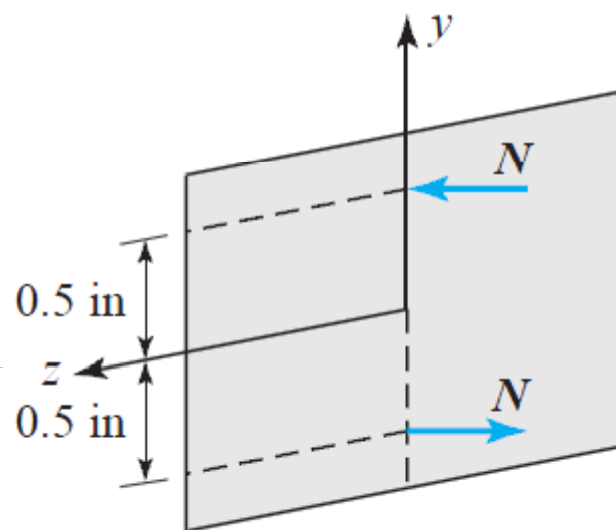
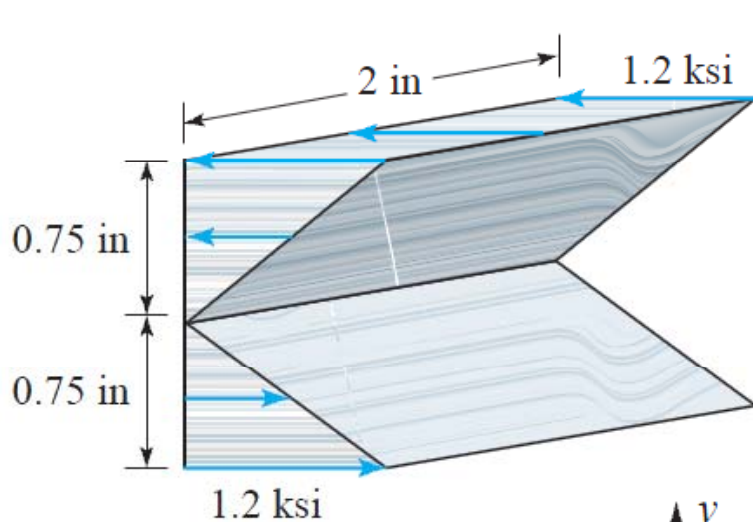
$$4 \left(1.6 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{0.5} + 6 \frac{y^3}{3} \Big|_{0.5}^{0.75} \right)$$

$$M_z = 2.64 \text{ in.} \cdot \text{kips}$$

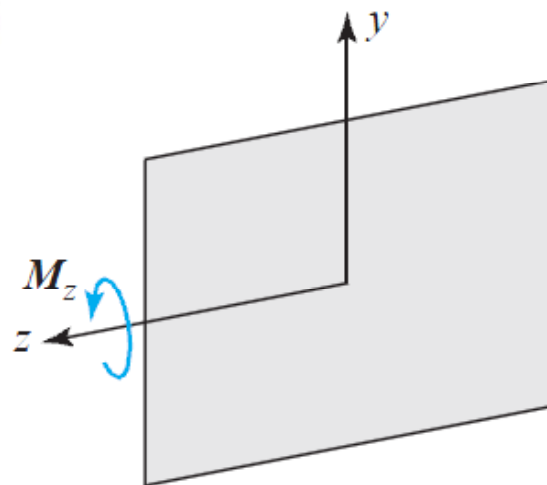


فصل ششم - خمش متقارن تیر

روابط تعادل استاتیک را میتوان در نمودارهای تنش و نیروی زیر مشاهده نمود:



$$\frac{1}{2} \times 1.2 \times 2 \times 0.75 = 0.9$$



$$M_z = 2 \times 0.5 \times N = 0.9 \text{ in}\cdot\text{kips}$$