فصل چهارم:

اعضای محوری

فصل چهارم- اعضای محوری

بخشهای اصلی

۱) مقدمه

۲) تئوری اعضای محوری

۳) تحلیل سازه ای

هدف:

درک تئوری اعضای محوری و استفاده از آن در طرح و تحلیل این اعضاء، رسم دیاگرام جسم آزاد نیروی محوری و تخمین تغییرشکل سازه

فصل چهارم- نیروی محوری

در دو شکل زیر، کابلهای منتقل کننده نیروی وزن عرشه پل به پایه های اصلی که نیروی کششی تحمل میکنند و دو عضو سیلندر هیدرولیکی که بار کامیون بالا نگه میدارد و نیروی فشاری تحمل مینماید، اعضای محوری میباشند. در واقع ستونها، اعضای خرپاها که پل را میسازند، پره های دوچرخه، Strutها در سوله ها و ... همگی اعضای محوری میباشند.

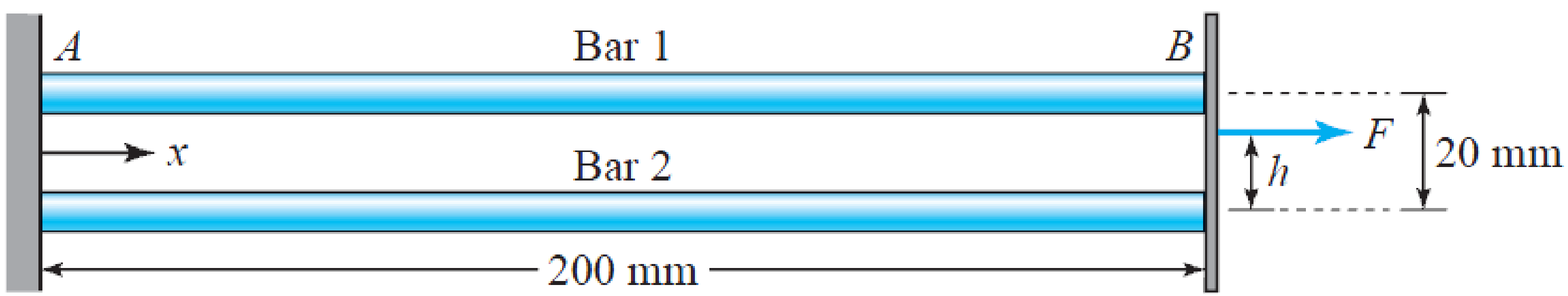
فصل چهارم- نیروی محوری

مهمترین ابزارها در این قسمت، نمودار جسم آزاد و نیز تغییرشکل تقریبی سازه میباشد.

۱) مقدمه

برای درک بهتر مفاهیم این بخش ابتدا به مثال زیر توجه نمایید:

مثال (۴-۱) دو میله فلزی زیر با مساحت ۲۰ میلیمترمربع به یک صفحه صلب متصل گردیده اند. چنانچه صفحه انتهایی میله ها بدون دوران، ۰/۰۵ میلیمتر جابجا شود، مقدار نیروی وارده و موقعیت آنرا در دو حالت زیر مشخص نمایید: الف) هر دو میله از فولاد با E=200 GPa ساخته شده اند، ب) میله ۱ از فولاد با مشخصه ذکر شده و میله ۲ از آلومینیوم با E=70 GPa میباشند.



فصل چهارم- نیروی محوری

حل: تغییرمکان نسبی نقطه B نسبت به نقطه A معادل ۰/۰۵ میلیمتر میباشد که میتوان کرنش محوری را با استفاده از آن محاسبه نمود. با ضرب کرنش محوری در مدول الاستیسیته، تنش محوری محاسبه میگردد. با ضرب تنش محوری در سطح مقطع، نیروی محوری در هر میله محاسبه میگردد. با رسم نمودار جسم آزاد، مقدار و موقعیت نیروی محوری محاسبه میگردد.

۱) محاسبه کرنش: تغییرمکان B معادل ۰/۰۵ میلیمتر و نقطه A معادل ۰ میباشد چون به دیوار متصل است. بعلاوه کرنش دو میله یکسان میباشد (بدلیل عدم دوران صفحه انتهایی).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A} = \frac{0.05 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 250 \ \mu\text{mm/mm} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

۲) محاسبه تنش: با استفاده از قانون هوک میتوان تنش نرمال را در میله ها در هر دو حالت (الف) و (ب) محاسبه نمود. در حالت (الف)، چون مقدار مدول الاستیسیته و کرنش در هر دو میله یکسان میباشند، تنش نیز در آنها برابر است:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = (200 \times 10^9 \text{ N/m}^2) \times 250 \times 10^{-6} = 50 \times 10^6 \text{ N/m}^2 (\text{T})$$

اما در حالت (ب) که مدول الاستیسیته در دو میله متفاوت میباشد، تنشهای متفاوتی حاصل خواهد شد:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = (200 \times 10^9 \text{ N/m}^2) \times 250 \times 10^{-6} = 50 \times 10^6 \text{ N/m}^2 (\text{T})$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = 70 \times 10^9 \times 250 \times 10^{-6} = 17.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2 (\text{T})$$

فصل چهارم- نیروی محوری

۳) نیروهای داخلی: با فرض اینکه تنش نرمال در هر میله یکنواخت باشد، میتوان نیروی داخلی نرمال را با داشتن مساحت میله و تنش آن محاسبه نمود:

$$N = \sigma A$$

$$A = 20\ \text{mm}^2 = 20 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

حالت (الف) بدلیل یکسان بودن مساحت و تنش هر دو میله، نیروها یکسان میباشد:

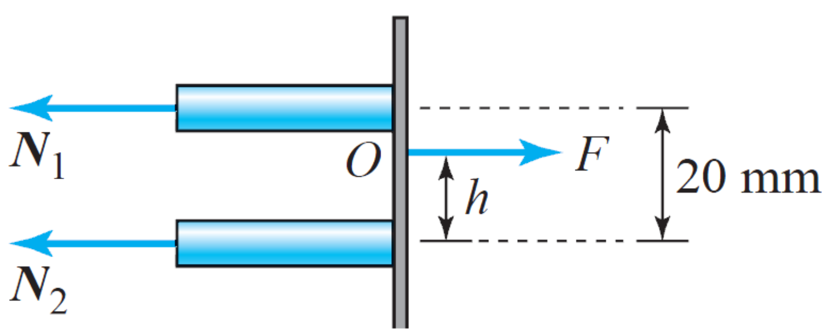
$$N_1 = N_2 = (50 \times 10^6\ \text{N/m}^2)(20 \times 10^{-6}\ \text{m}^2) = 1000\ \text{N (T)}$$

اما در حالت (ب)، تنش در دو میله متفاوت میباشد، بنابراین نیروها نیز متفاوت هستند:

$$N_1 = \sigma_1 A_1 = (50 \times 10^6\ \text{N/m}^2)(20 \times 10^{-6}\ \text{m}^2) = 1000\ \text{N (T)}$$

$$N_2 = \sigma_2 A_2 = (17.5 \times 10^6\ \text{N/m}^2)(20 \times 10^{-6}\ \text{m}^2) = 350\ \text{N (T)}$$

۴) نیروهای خارجی: با زدن یک مقطع فرضی و رسم نمودار جسم آزاد، میتوان نیروی F را محاسبه نمود:



$$F = N_1 + N_2$$

$$N_1(20 - h) - N_2 h = 0$$

$$h = \frac{20 N_1}{N_1 + N_2}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

بنابراین در حالت (الف) مقدار نیرو و موقعیت آن برابر مقادیر زیر میباشد:

$$F = 1000\ \text{N} + 1000\ \text{N} = 2000\ \text{N}$$

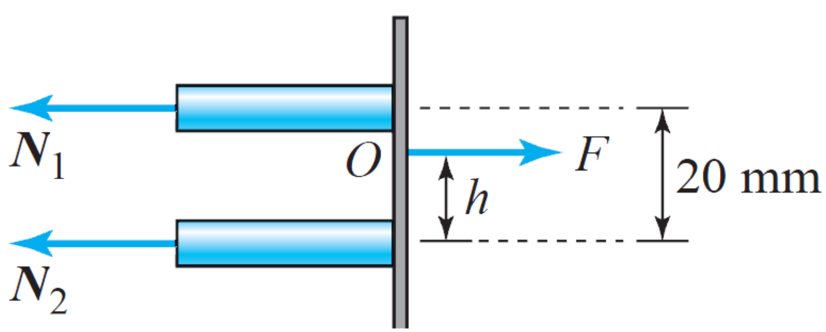
$$h = \frac{20\ \text{mm} \times 1000\ \text{N}}{(1000\ \text{N} + 1000\ \text{N})} = 10\ \text{mm}$$

و در حالت (ب) مقدار نیرو و موقعیت آن برابر خواهد بود با:

$$F = 1000\ \text{N} + 350\ \text{N} = 1350\ \text{N}$$

$$h = \frac{20\ \text{mm} \times 1000\ \text{N}}{(1000\ \text{N} + 350\ \text{N})} = 14.81\ \text{mm}$$

۴) نیروهای خارجی: با زدن یک مقطع فرضی و رسم نمودار جسم آزاد، میتوان نیروی F را محاسبه نمود:



$$F = N_1 + N_2$$

$$N_1(20 - h) - N_2 h = 0$$

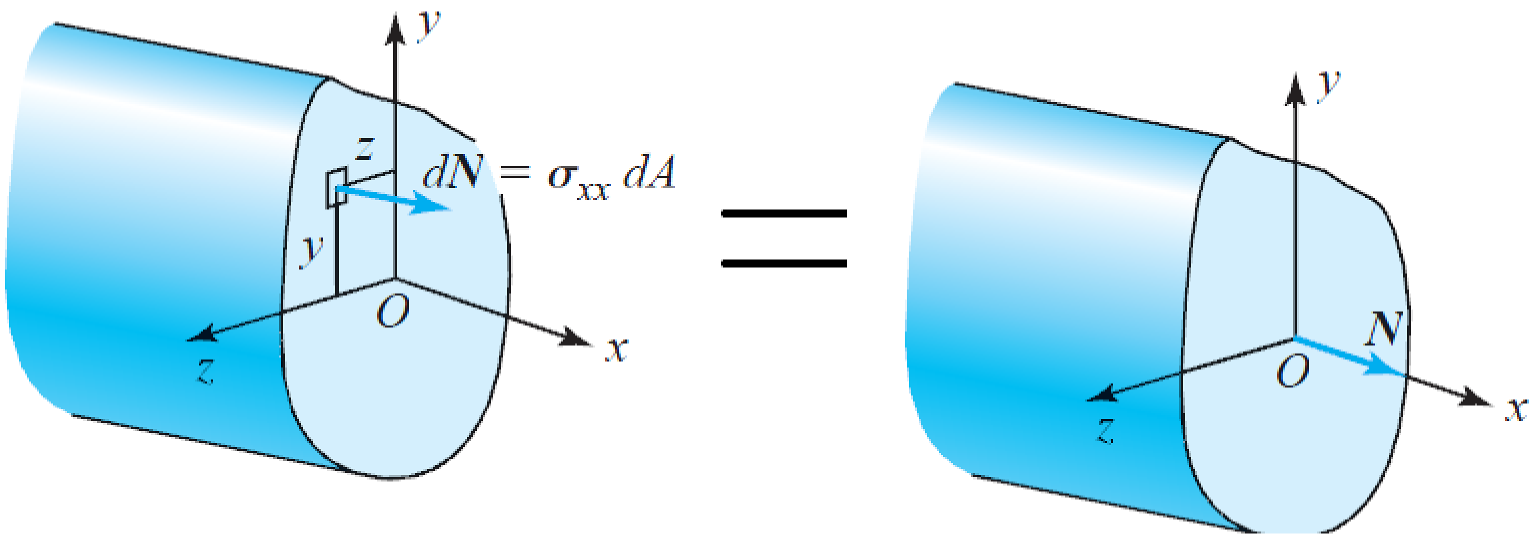
$$h = \frac{20 N_1}{N_1 + N_2}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

۱-۱ نیروی محوری داخلی

- همانطور که در مثال قبل مشاهده شد، تنش نرمال روی یک سطح را میتوان با نیروی محوری داخلی معادل با انتگرال گیری روی سطح مذکور جایگزین نمود. با توجه به اشکال زیر، نیروی محوری روی یک المان را میتوان انتگرال گیری نمود و نیروی محوری کل سطح را محاسبه نمود.

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \int_A \sigma_{xx}\, dA}$$

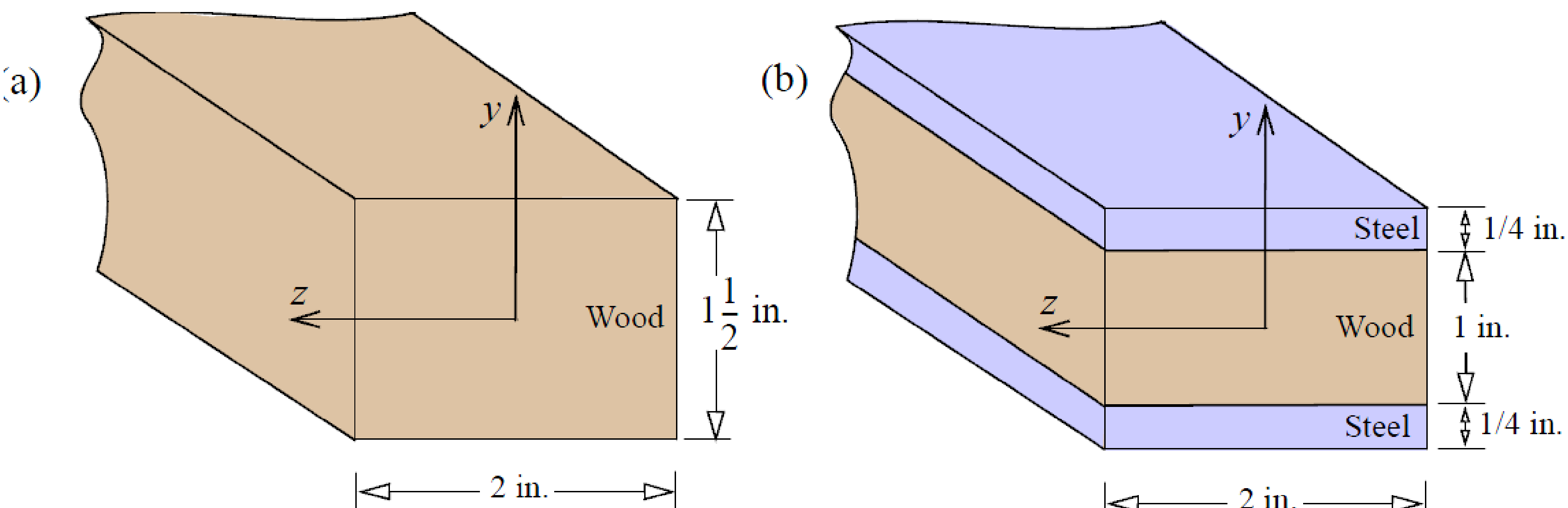


فصل چهارم- نیروی محوری

- از طرفی باید دقت نمود که لنگر در مقطع مذکور باید حول دو محور y و z برابر صفر باشد.

$$\int_A y\sigma_{xx}\, dA = 0 \qquad \int_A z\sigma_{xx}\, dA = 0$$

مثال (۴-۲) شکل زیر یک مقطع چوبی همگن و همچنین مقطع چوبی ای که با فولاد مسلح شده است را نشان میدهد. کرنش نرمال برای هر دو شکل یکسان و معادل ۲۰۰- میکرون میباشد. الف) توزیع تنش نرمال را برای هر دو مقطع نشان دهید، ب) نیروی محوری داخلی معادل را برای هر یک از مقاطع محاسبه نمایید.



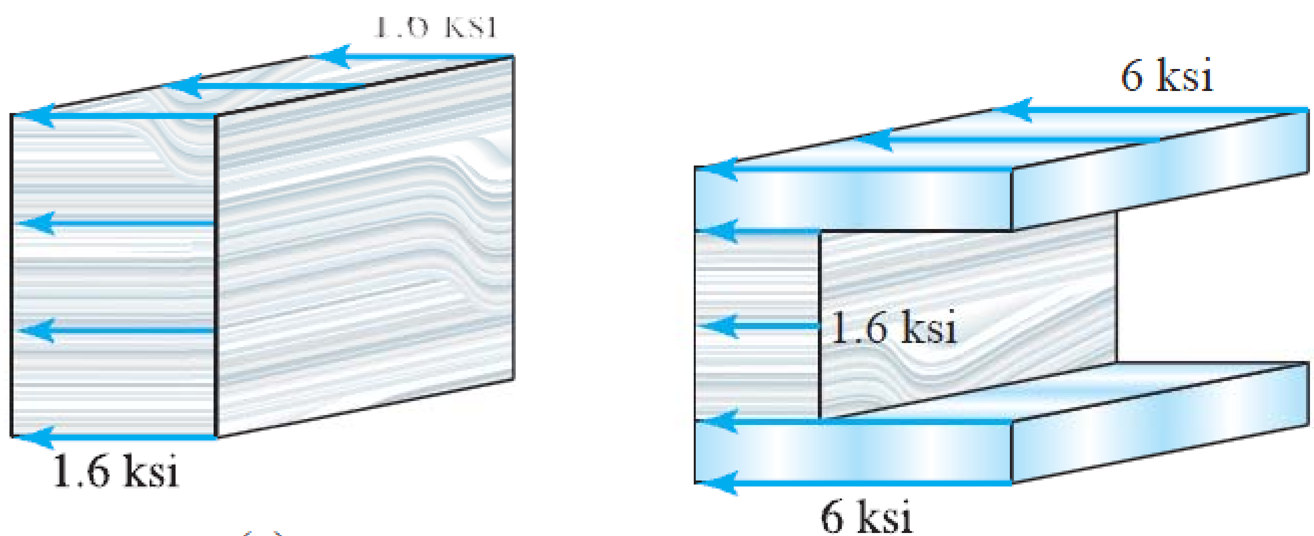
فصل چهارم- نیروی محوری

حل: الف) با استفاده از قانون هوک مقادیر تنش برای هر ماده محاسبه میگردد. با فرض یکنواخت بودن تنش در هر ماده میتوان تنشها را در مقطع نمایش داد. ب) برای مقطع همگن نخست میتوان از رابطه انتگرال استفاده نمود و برای مقطع دوم میتوان جمع انتگرال مزبور روی هر ماده را بعنوان نیروی N محاسبه نمود.

الف) با استفاده از قانون هوک تنشها را بصورت زیر خواهیم داشت و در شکل زیر تنشها در مقطع نمایش داده شده اند:

$$(\sigma_{xx})_{\text{wood}} = (8000\ \text{ksi})(-200)10^{-6} = -1.6\ \text{ksi}$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{steel}} = (30000\ \text{ksi})(-200)10^{-6} = -6\ \text{ksi}$$



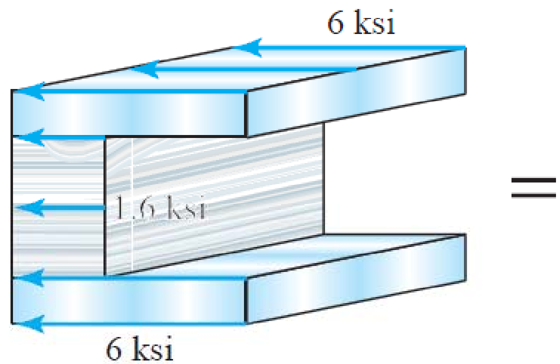
(a) (b)

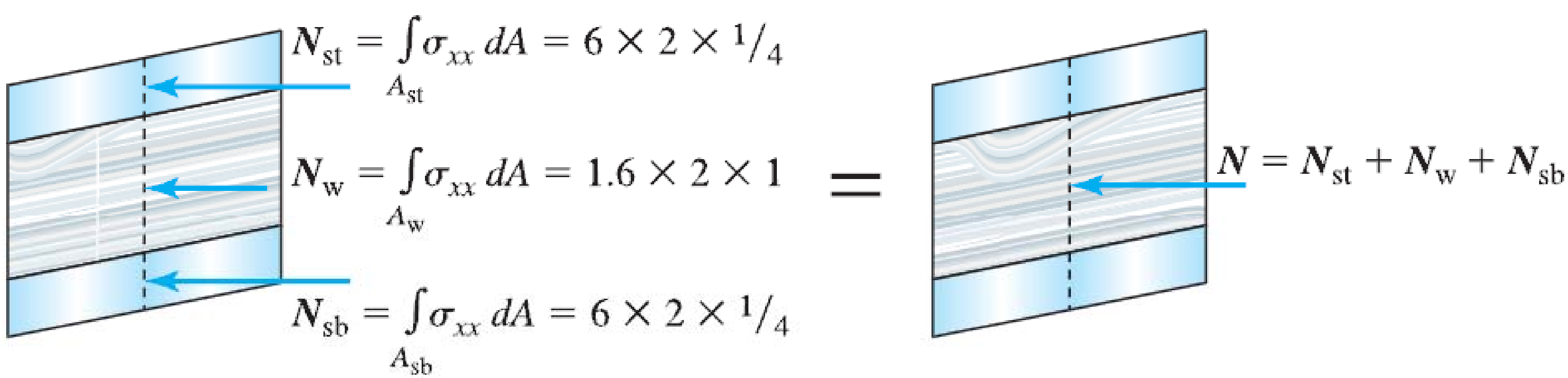
فصل چهارم- نیروی محوری

ب) نیرووی محوری داخلی معادل در مقطع همگن بصورت زیر خواهد بود:

$$N = \int_A (\sigma_{xx})_{\text{wood}}\, dA = (\sigma_{xx})_{\text{wood}} A = (-1.6 \text{ ksi})(2 \text{ in.})(1.5 \text{ in.}) = -4.8 \text{ kips}$$

چنانچه مساحت فولاد پایین و بالا را بترتیب با Asb و Ast و مساحت قسمت چوبی را با Aw نمایش دهیم، مقدار نیروی محوری داخلی معادل در مقطع ناهمگن بصورت زیر محاسبه میگردد:





فصل چهارم- نیروی محوری

$$N = \int_{A_{sb}} \sigma_{xx}\, dA + \int_{A_w} \sigma_{xx}\, dA + \int_{A_{st}} \sigma_{xx}\, dA$$

$$= \int_{A_{sb}} (\sigma_{xx})_{\text{steel}}\, dA + \int_{A_w} (\sigma_{xx})_{\text{wood}}\, dA + \int_{A_{st}} (\sigma_{xx})_{\text{steel}}\, dA$$

$$N = (\sigma_{xx})_{\text{steel}} A_{\text{sb}} + (\sigma_{xx})_{\text{wood}} A_{\text{w}} + (\sigma_{xx})_{\text{steel}} A_{\text{st}}$$

$$= (-6\ \text{ksi})(2\ \text{in.})\left(\frac{1}{4}\ \text{in.}\right) + (-1.6\ \text{ksi})(1\ \text{in.})(2\ \text{in.}) + (-6\ \text{ksi})(2\ \text{in.})\left(\frac{1}{4}\ \text{in.}\right)$$

$$N = 9.2\ \text{kips (C)}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

۲) تئوری اعضای محوری

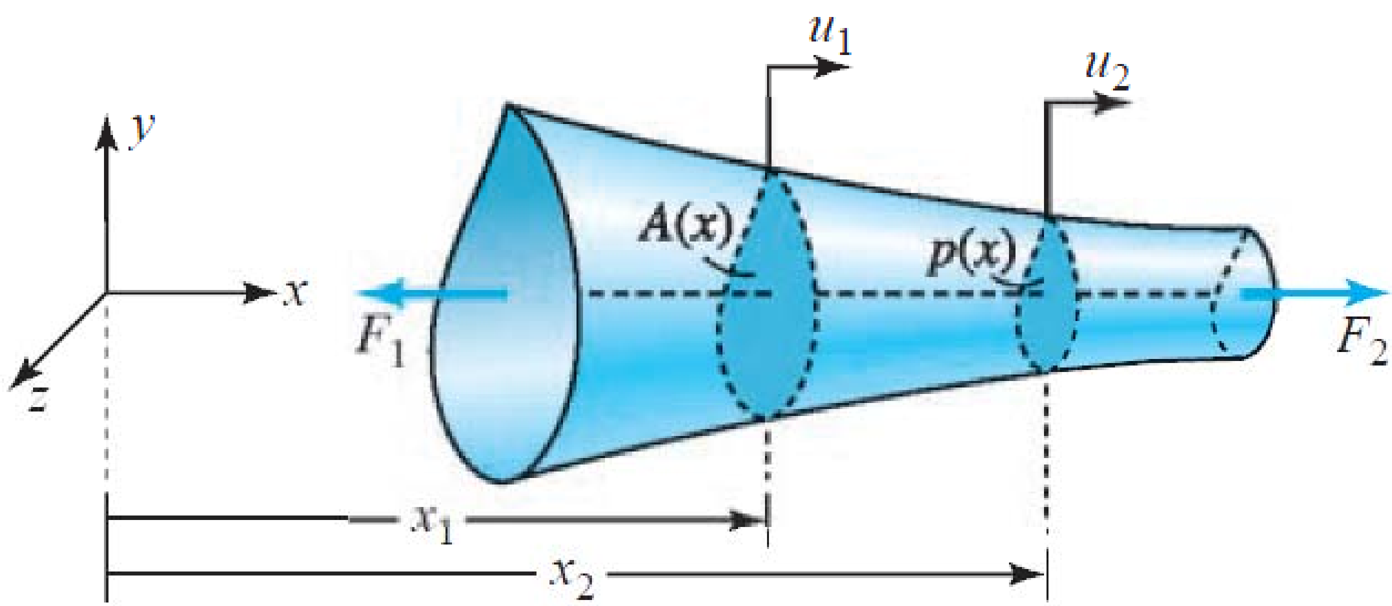
در این قسمت موارد و مثالهای گفته در بخش قبلی بصورت پارامتری انجام میشود تا روابط مربوط به اعضای محوری ارائه گردد. تئوری اعضای محوری با فرضیات زیر ارائه میگردد:

- طول عضو بطور قابل توجهی از بزرگترین بعد عضو بزرگتر میباشد.
- نواحی اطراف تمرکز تنش مورد بحث نمیباشند.
- تغییرات نیروهای خارجی و مساحت مقطع بصورت تدریجی خواهد بود مگر در نواحی تمرکز تنش.
- نیروی محوری بگونه ای اعمال میشود که هیچ خمشی ایجاد ننماید.
- نیروهای خارجی تابعی از زمان نمیباشند (مسئله استاتیکی است).

فصل چهارم- نیروی محوری

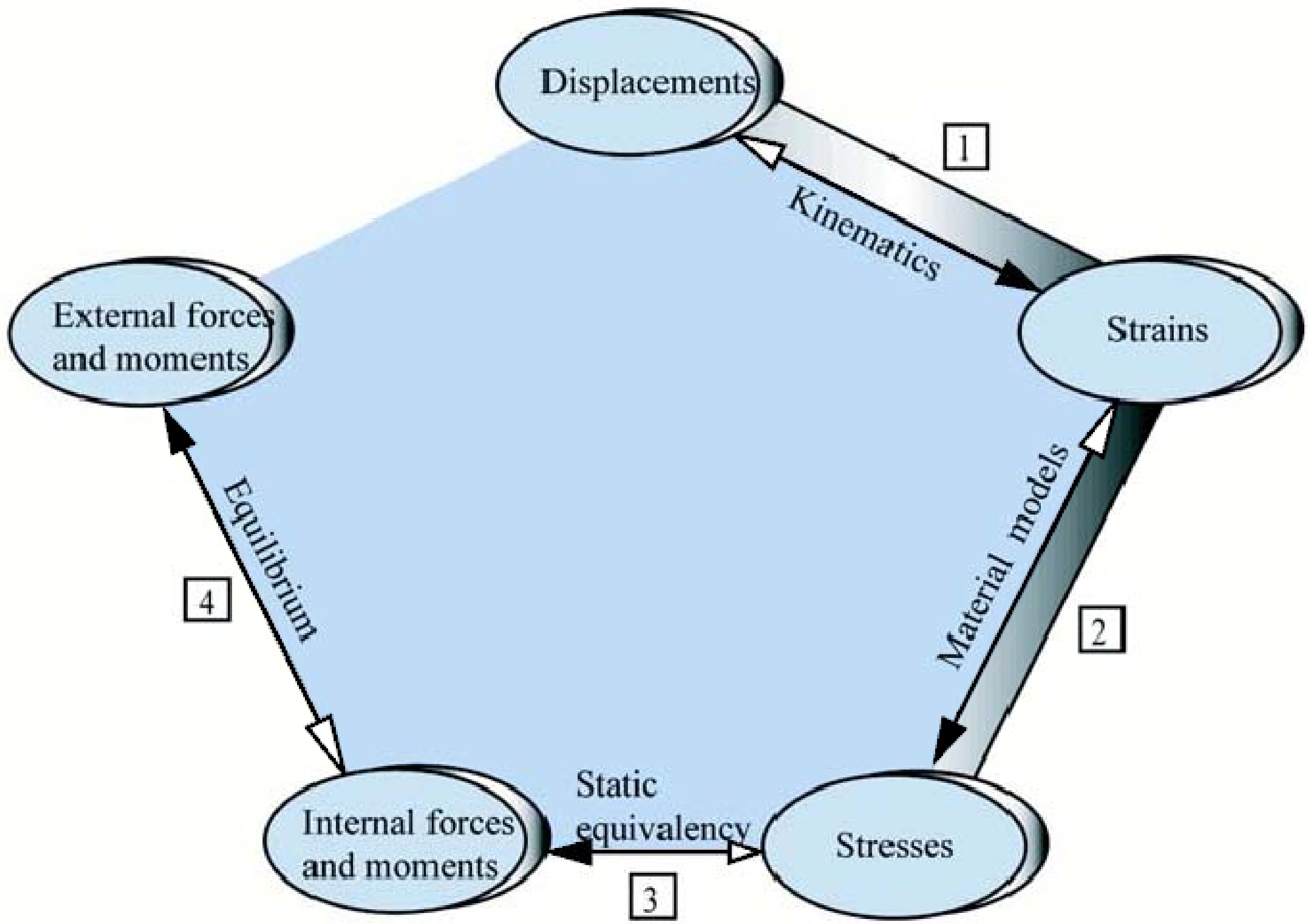
در شکل زیر، نیروی P(x)، نیروی گسترده محوری خارجی در واحد طول و نیروهای F1 و F2 نیروهای خارجی اعمال شده بر دو انتهای سازه زیر میباشند. هدف تئوری محاسبه فرمولی برای تغییرمکان نسبی u2-u1 و تنش نرمال بر حسب نیروی محوری داخلی N میباشد.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



فصل چهارم- نیروی محوری

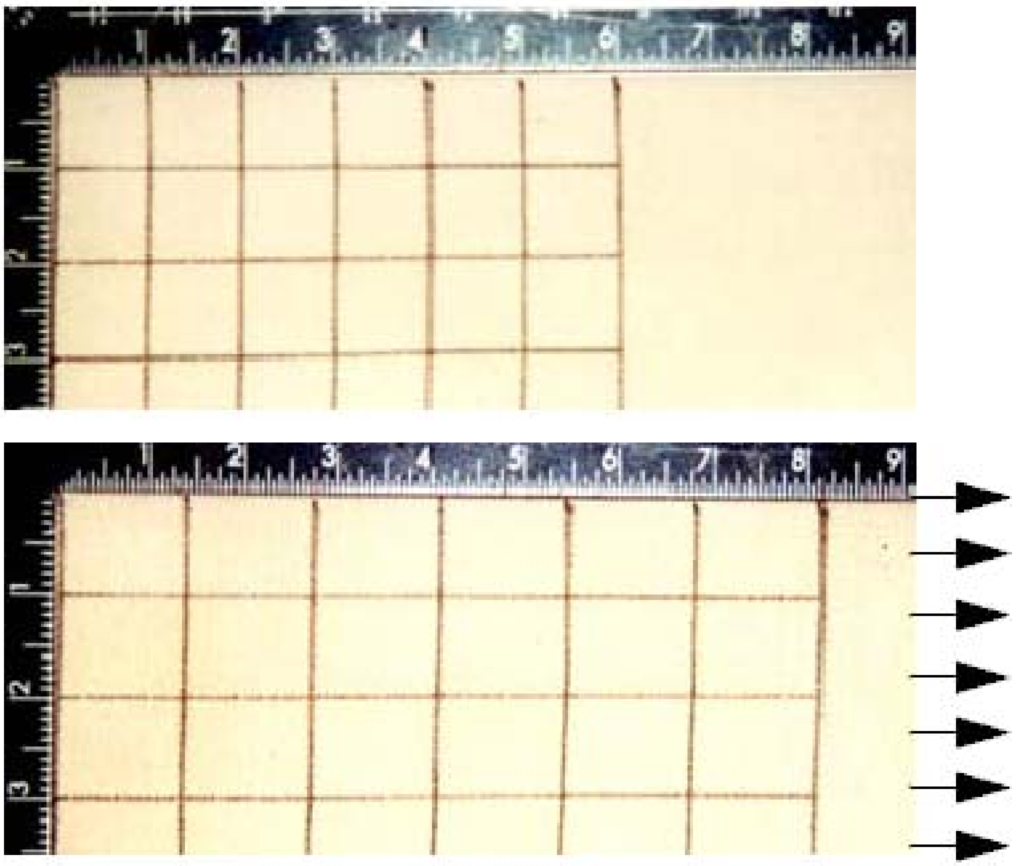
در واقع میتوان از نمودار منطقی زیر در مکانیک جامدات جهت درک بهتر مراحل استفاده نمود:



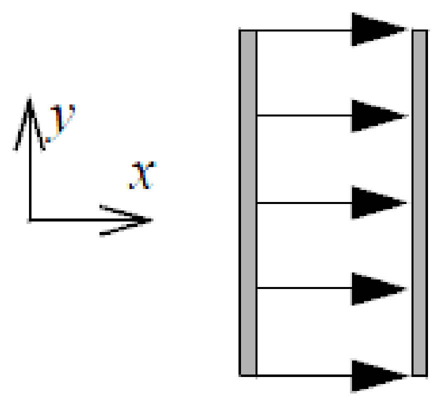
فصل چهارم- نیروی محوری

۲-۱ سینماتیک

در مورد سینماتیک مسئله باید دقت نمود که با توجه به شکل زیر، فرض بر این است که مقاطع صفحه ای پس از تغییرشکل بصورت صفحه و موازی باقی میمانند (فرض ۱). بنابراین تغییرمکان شکل زیر تابعی از y نبوده ولی تابعی از x میباشد:



$$u = u(x)$$



فصل چهارم- نیروی محوری

۲-۲ توزیع کرنش

فرض بر این است که کرنشها از نوع کرنش کوچک هستند (فرض ۲).

اگر در مقطع مخروطی نشان داده شده در بالا، نقاط X2 و X1 بیکدیگر نزدیک باشند، در اینصورت کرنش در هر نقطه ای بصورت زیر نمایش داده میشود:

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}(x)}$$

این رابطه تأکید مینماید که کرنش محوری در مقطع یکنواخت بوده و فقط تابعی از x میباشد و چنانچه دو فرض ذکر شده (باقی ماندن صفحه بصورت صفحه پس از تغییرشکل و فرض کرنش کوچک) برقرار باشند، کرنش تابعی از مشخصات مصالح نمیباشد.

فصل چهارم- نیروی محوری

۲-۳ مدل مصالح

هدف بدست آوردن یک رابطه ساده میباشد، بنابراین مصالح نیز به ساده ترین شکل فرض میشوند:

مصالح ایزوتروپیک (فرض ۳)، الاستیک خطی (فرض ۴) هستند و از کرنش غیرخطی صرفنظر میشود (فرض ۵).

با جایگذاری رابطه کرنش بدست آمده در قانون هوک، خواهیم داشت:

$$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx}, \qquad \sigma_{xx} = E\frac{du}{dx}$$

اگرچه کرنش نسبت به z و y تغییرات ندارد، بدلیل امکان تغییرات مدول الاستیسیته در مقطع، نمیتوان این مطلب را در مورد تنش عنوان کرد.

فصل چهارم- نیروی محوری

۲-۴ روابط اعضای محوری

با توجه به عدم تغییرات کرنش نسبت به z و y و تعریف مساحت المان جزء بصورت زیر، میتوان نیروی محوری داخلی معادل را بصورت زیر نوشت:

$$dA = dy\,dz \qquad N = \int_A E\frac{du}{dx}\,dA = \frac{du}{dx}\int_A E\,dA$$

همچنین با فرض همگن بودن مصالح در مقطع (فرض ۶)، میتوان رابطه زیر را استخراج نمود:

$$N = E\frac{du}{dx}\int_A dA = EA\frac{du}{dx} \qquad \boxed{\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}}$$

EA در واقع صلبیت محوری نامیده شده و صلبیت عضو محوری را میتوان با بالا بردن استحکام مصالح و یا افزایش سطح مقطع، افزایش داد.

$$\sigma_{xx} = E\frac{du}{dx} \longrightarrow \sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

اگر از رابطه زیر که قبلا ارائه شده، انتگرال گیری شود، تغییرشکل بین دو نقطه محاسبه میگردد:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\boldsymbol{N}}{EA} \longrightarrow u_2 - u_1 = \int_{u_1}^{u_2} du = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\boldsymbol{N}}{EA}\, dx$$

حال چنانچه مصالح میان نقطه ۱ و ۲ همگن باشند (مدول الاستیسیته ثابت، فرض ۷)، میله در این فاصله دچار تغییر مساحت نگردد (فرض ۸) و نیروی محوری خارجی و در نتیجه داخلی، در این فاصله تغییر نکنند (N ثابت باشد، فرض ۹)، میتوان رابطه فوق را بصورت زیر خلاصه نمود:

$$u_2 - u_1 = \frac{\boldsymbol{N}(x_2 - x_1)}{EA}$$

EA در واقع صلبیت محوری نامیده شده و صلبیت عضو محوری را میتوان با بالا بردن استحکام مصالح و یا افزایش سطح مقطع، افزایش داد.

$$\sigma_{xx} = E\frac{du}{dx} \longrightarrow \sigma_{xx} = \frac{\boldsymbol{N}}{A}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

۲-۵ موقعیت نیروی محوری

همانطور که قبلا نیز گفته شد، جهت دستیابی به نیروی محوری خالص، لنگرهای خمشی داخلی باید معادل صفر باشند.

$$\sigma_{xx} = E\frac{du}{dx} \longrightarrow$$

$$\int_A y\sigma_{xx}\, dA = \int_A yE\frac{du}{dx}\, dA = \frac{du}{dx}\int_A yE\ dA = 0$$

$$\int_A yE\ dA = 0$$

$$\int_A z\sigma_{xx}\, dA = \int_A zE\frac{du}{dx}\, dA = \frac{du}{dx}\int_A zE\ dA = 0$$

$$\int_A zE\ dA = 0$$

اگر مطابق فرض ۶، عضو در مقطع همگن باشد (مدول الاستیسیته ثابت باشد)، میتوان روابط فوق را بصورت زیر نوشت:

$$\int_A y\, dA = 0 \qquad \int_A z\, dA = 0$$

فصل چهارم- نیروی محوری

با توجه به مطالب گفته شده، چنانچه نیروهای محوری خارجی و داخلی هم محور باشند و از مرکز سطح عبور نمایند، تغییرشکل محوری خالص حاصل خواهد شد که باید مرکز سطح تمام مقاطع با هم یک خط راست را تشکیل دهند که میله های منحنی شکل شامل این فرض نمیشود، اگرچه اعضای پله ای را شامل میشود.

۲-۶ کرنشها و تنشهای محوری

در حالت تنش محوری خالص، کلیه مؤلفه های تنش غیر از تنش نرمال راستای X معادل صفر میباشند، بنابراین کرنشهای زیر را میتوان تعریف نمود:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \qquad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} = -\nu\varepsilon_{xx} \qquad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} = -\nu\varepsilon_{xx}$$

در رابطه فوق، نو ضریب پواسون میباشد.

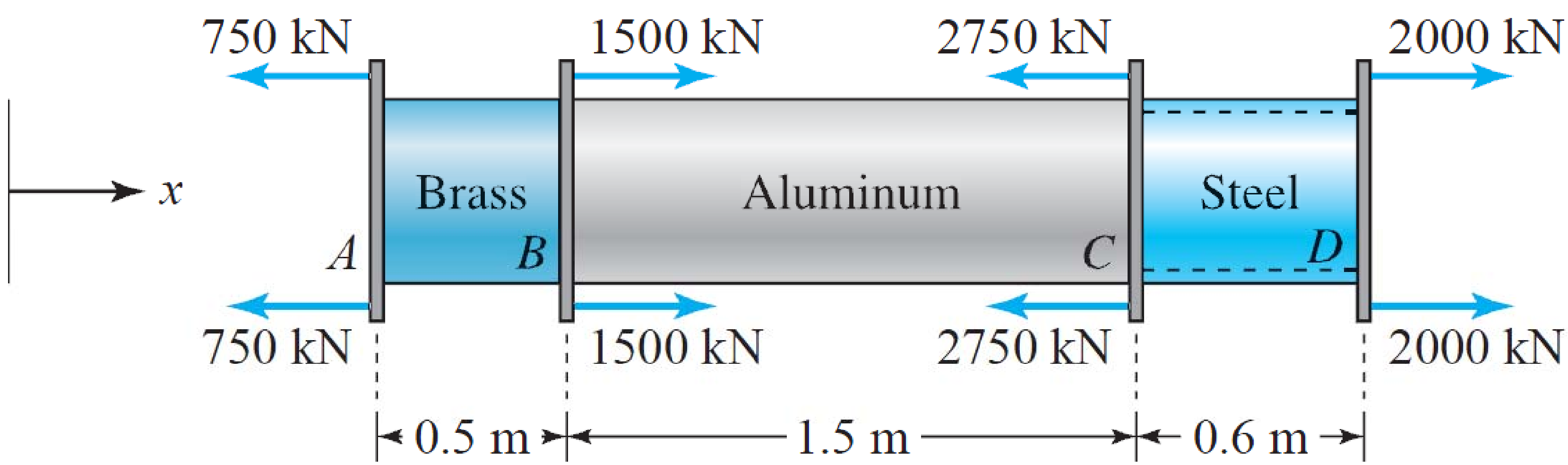
فصل چهارم- نیروی محوری

مثال (۴-۳) میله های استوانه ای برنجی و آلومینیومی به میله تیوبی فولادی متصل شده اند که قطر خارجی همه آنها معادل ۲۰۰ میلیمتر میباشد. الف) برای بارگذاری نشان داده شده، جابجایی صفحه C را نسبت به A تعیین نمایید. ب) تغییر قطر استوانه برنجی را تعیین نمایید.

$E_{br} = 100 \text{ GPa}, \ \nu_{br} = 0.34$

$E_{al} = 70 \text{ GPa}, \ \nu_{al} = 0.33$

$E_{st} = 210 \text{ GPa}, \ \nu_{st} = 0.3$



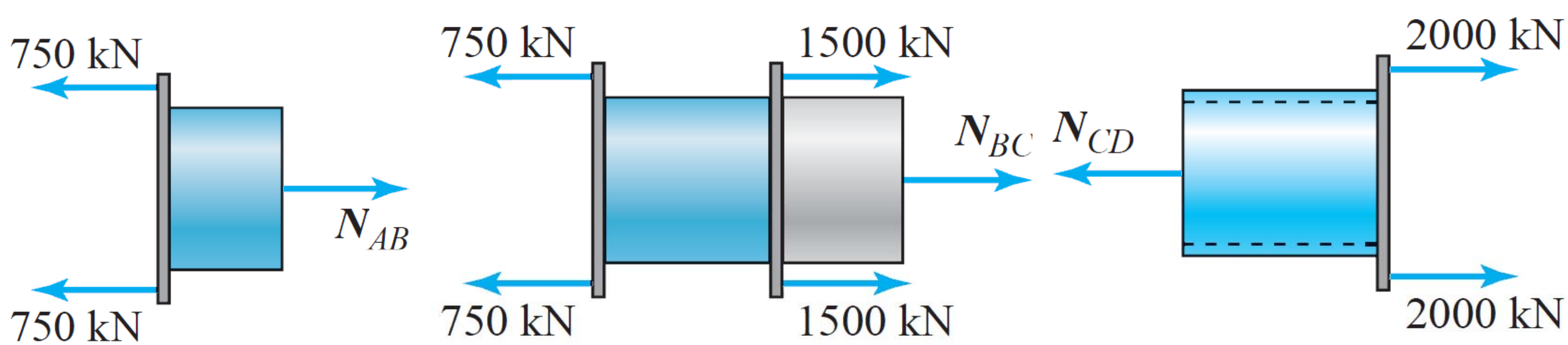
فصل چهارم- نیروی محوری

حل: الف) در ابتدا در مقاطع برنجی، آلومینیومی و فولادی مقطع فرضی زده و با تعیین نیروهای داخلی محوری از تعادل، حرکت نسبی صفحه B به A و سپس صفحه C به B را میتوان محاسبه نمود. با جمع نمودن این دو تغییرمکان نسبی، میتوان حرکت نسبی C به A را بدست آورد. ب) ابتدا تنش نرمال میله AB محاسبه میگردد و سپس کرنش در راستای y محاسبه میگردد.

الف) مساحت مقاطع AB و BC بصورت زیر محاسبه میشوند:

$$A_{AB} = A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.2\text{ m})^2 = 31.41 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

با زدن مقاطع فرضی و رسم نمودار جسم آزاد، نیروهای محوری داخلی محاسبه میگردند:



$$N_{AB} = 1500\text{ kN}$$

$$N_{CD} = 4000\text{ kN}$$

$$N_{BC} = 1500\text{ kN} - 3000\text{ kN} = -1500\text{ kN}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

$$u_B - u_A = \frac{N_{AB}(x_B - x_A)}{E_{AB}A_{AB}} = \frac{(1500 \times 10^3\ \mathrm{N})(0.5\ \mathrm{m})}{(100 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2})(31.41 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2})} = 0.2388 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$u_C - u_B = \frac{N_{BC}(x_C - x_B)}{E_{BC}A_{BC}} = \frac{(-1500 \times 10^3\ \mathrm{N})(1.5\ \mathrm{m})}{(70 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2})(31.41 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2})} = -1.0233 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$u_C - u_A = (u_C - u_B) + (u_B - u_A) = (0.2388\ \mathrm{m} - 1.0233\ \mathrm{m})10^{-3}$$

$$u_C - u_A = 0.7845\ \mathrm{mm\ contraction}$$

ب) همانطور که گفته شد، با محاسبه تنش نرمال و کرنش راستای y در صفحه، میتوان تغییر قطر استوانه برنجی (AB) را محاسبه نمود:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{1500 \times 10^3\ \mathrm{N}}{(31.41 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2})} = 47.8 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2}$$

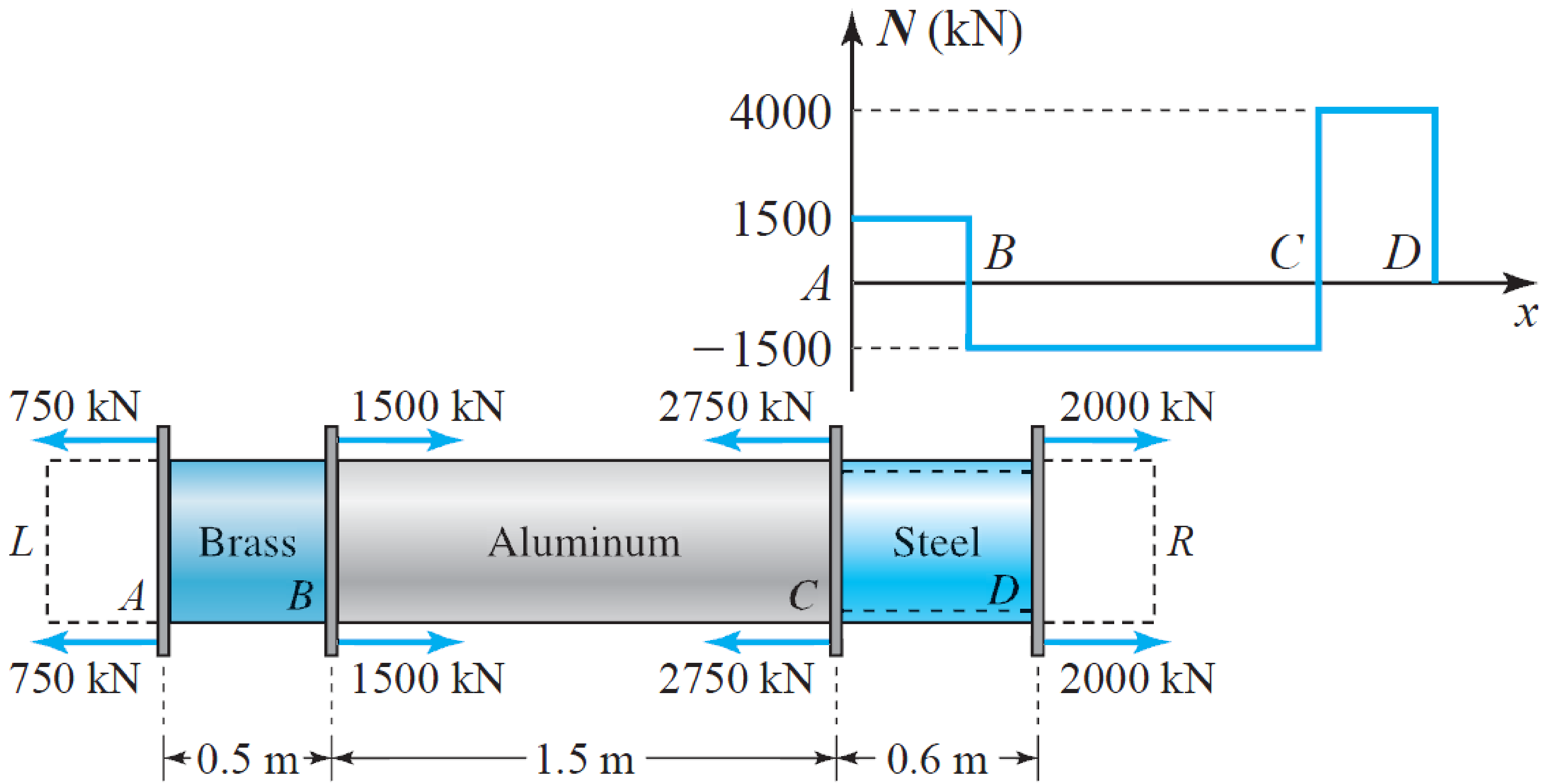
$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu_{br}\sigma_{xx}}{E_{br}} = -\frac{0.34(47.8 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2})}{100 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}} = -0.162 \times 10^{-3} = \frac{\Delta d}{200\ \mathrm{mm}}$$

$$\Delta d = -0.032\ \mathrm{mm}$$

فصل چهارم- نیروی محوری

مثال (۴-۴) دیاگرام نیروی محوری را برای عضو محوری مثال ۳ رسم نمایید و تغییرمکان صفحه C نسبت به A را بدست آورید.

حل: با فرض اینکه LA در واقع ناحیه کش آمده میباشد، رسم دیاگرام نیروی محوری آغاز میگردد. نیروی محوری قسمت LA صفر میباشد و در نقطه A نیروی محوری بصورت کششی و معادل 1500KN میباشد. با داشتن دیاگرام نیروی محوری و نیز سطح مقطع اعضا و مدول الاستیسیته آنها، میتوان تغییرمکان C را نسبت به A براحتی محاسبه نمود:



فصل چهارم- نیروی محوری

$$u_2 - u_1 = \frac{N(x_2 - x_1)}{EA}$$

$$\Delta u = u_C - u_A = \frac{N_{AB}(x_B - x_A)}{E_{AB}A_{AB}} + \frac{N_{BC}(x_C - x_B)}{E_{BC}A_{BC}}$$

$$= \frac{(1500 \times 10^3 \text{ N})(0.5 \text{ m})}{(100 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(31.41 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} + \frac{(-1500 \times 10^3 \text{ N})(1.5 \text{ m})}{(70 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(31.41 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} =$$

$$u_C - u_A = 0.7845 \text{ mm contraction}$$