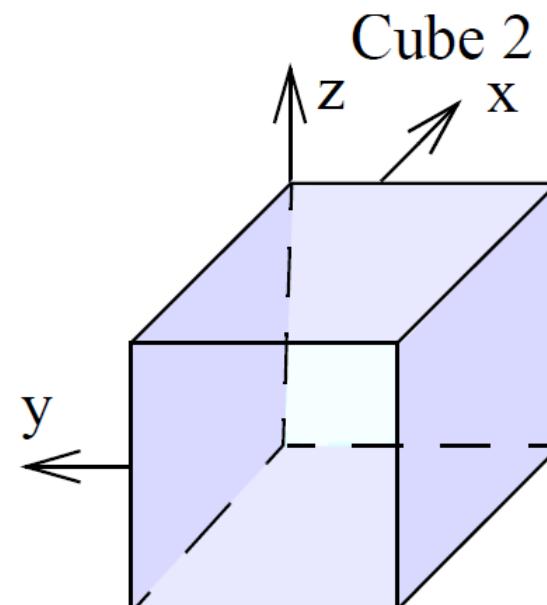
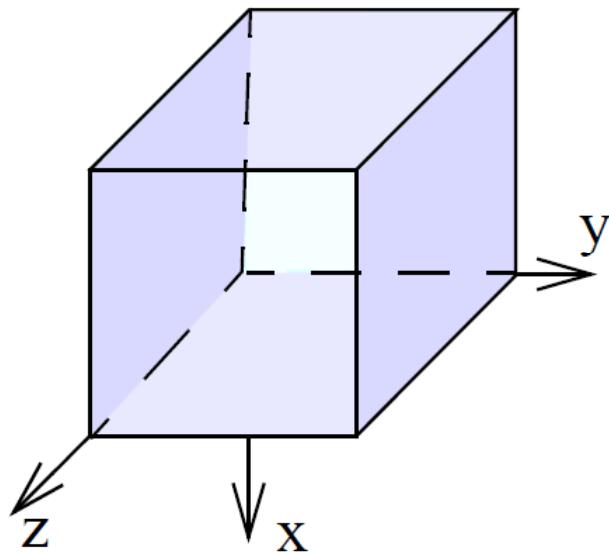


المان تنش

مثال (۳-۲) تنشهای غیر صفر در سطح دو مکعب نشان داده شده در دو سیستم مختصات متفاوت نمایش دهید؟

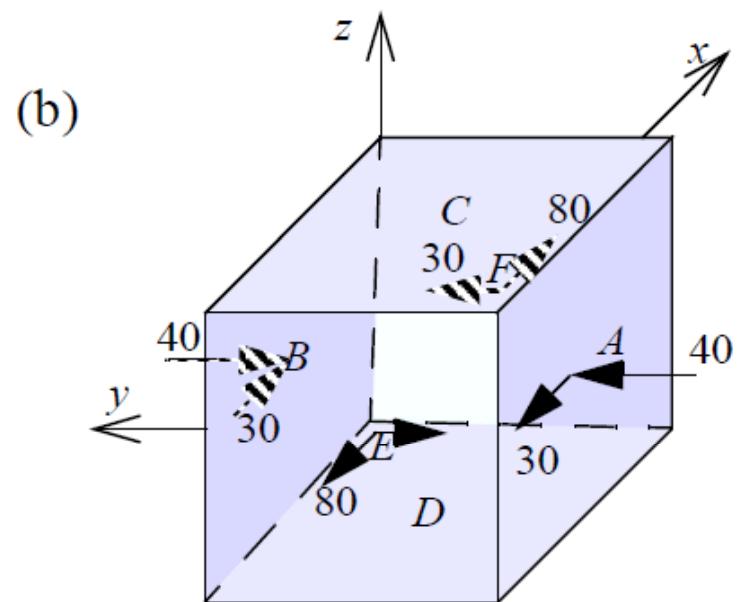
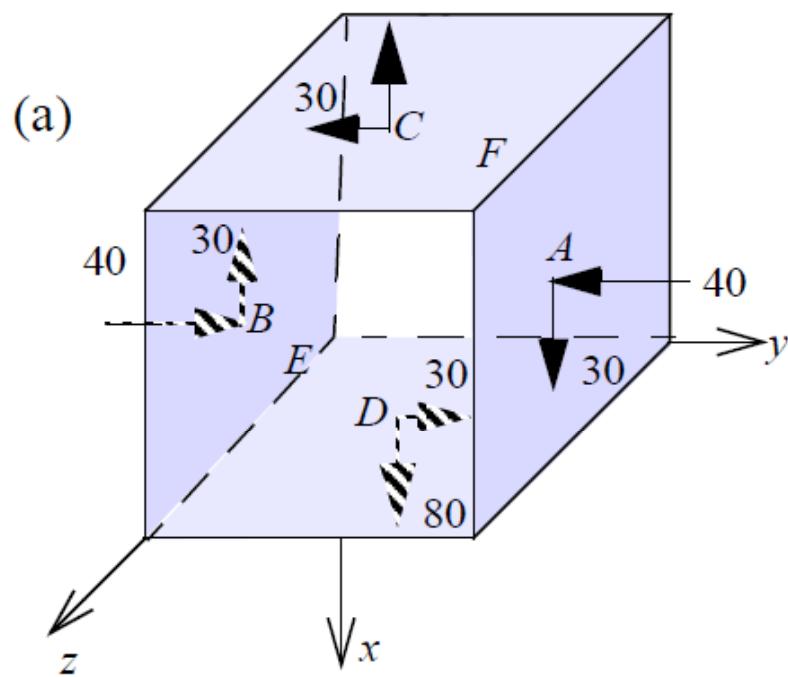
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} = 80 \text{ MPa(T)} & \tau_{xy} = 30 \text{ MPa} & 0 \\ \tau_{yx} = 30 \text{ MPa} & \sigma_{yy} = 40 \text{ MPa(C)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cube 1



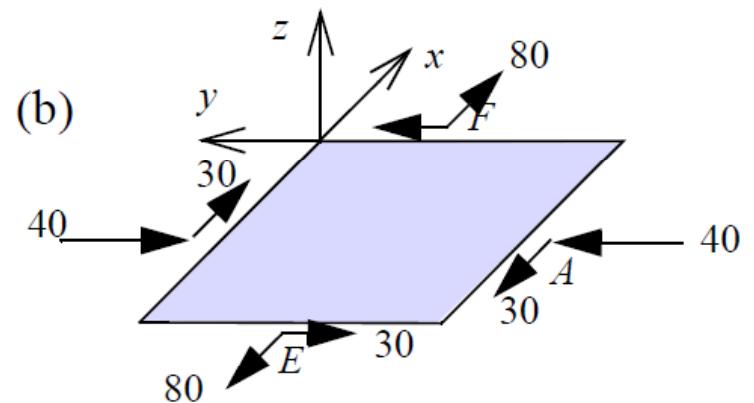
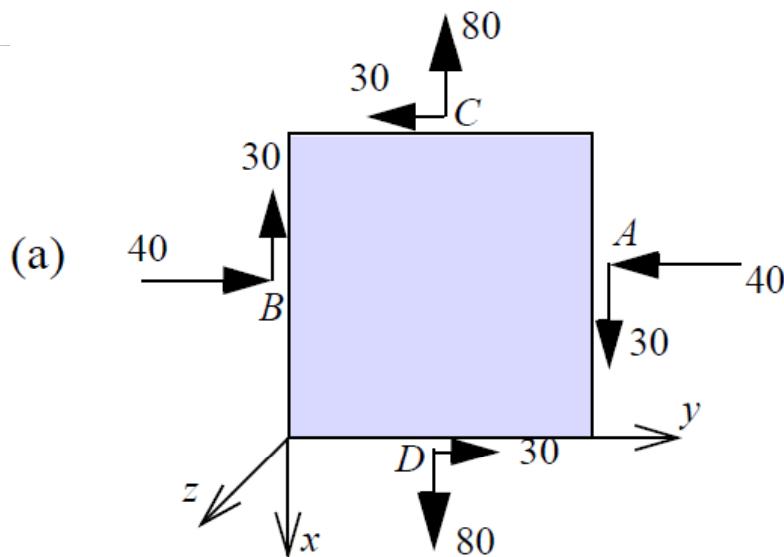
المان تنش

حل: با در نظر گرفتن قرارداد ذکر شده (اندیس اول بیانگر نرمال صفحه ای که تنش بر روی آن محاسبه میگردد و اندیس دوم جهت نیروی اعمال شده)، تنشهای فوق مطابق زیر بر روی مکعبها نمایش داده میشوند (حرف T بمعنای کشش و حرف P بمعنای فشار میباشد):



المان تنش

دقت نمایید از آنجا که در راستای Z و در صفحه Z تنشی موجود نمیباشد(در تنسور تنش، اندیس اول و دوم معادل Z برابر صفر میباشند)، میتوان این تنشهای را در بصورت تنش صفحه ای نمایش داد که در زیر ارائه شده است. همانطور که از شکلها نیز بر می آید، نمایش تنشهای در صفحه ساده تر میباشد.

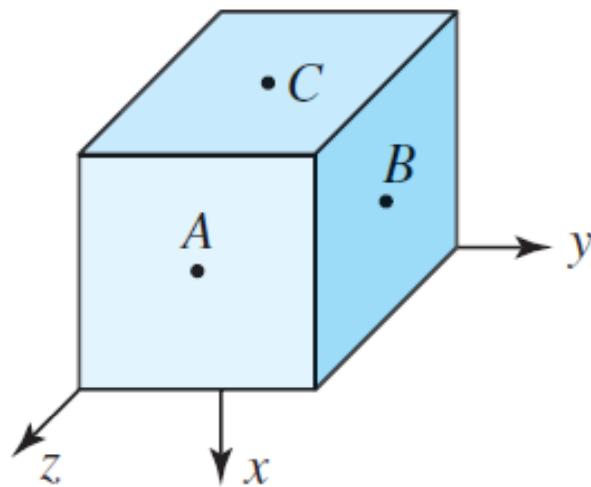


المان تنش

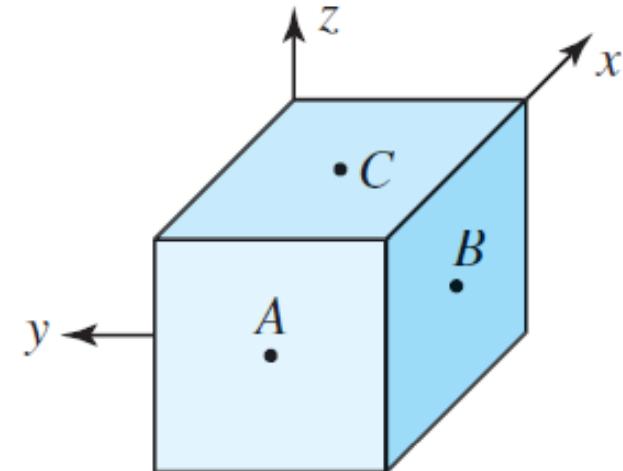
تمرین (۱-۲) مؤلفه های تنش غیر صفر را در دو مکعب زیر نشان دهید.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} = 80 \text{ MPa (T)} & \tau_{xy} = 30 \text{ MPa} & \tau_{xz} = -70 \text{ MPa} \\ \tau_{yx} = 30 \text{ MPa} & \sigma_{yy} = 0 & \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{zx} = -70 \text{ MPa} & \tau_{zy} = 0 & \sigma_{zz} = 40 \text{ MPa (C)} \end{bmatrix}$$

Cube 1

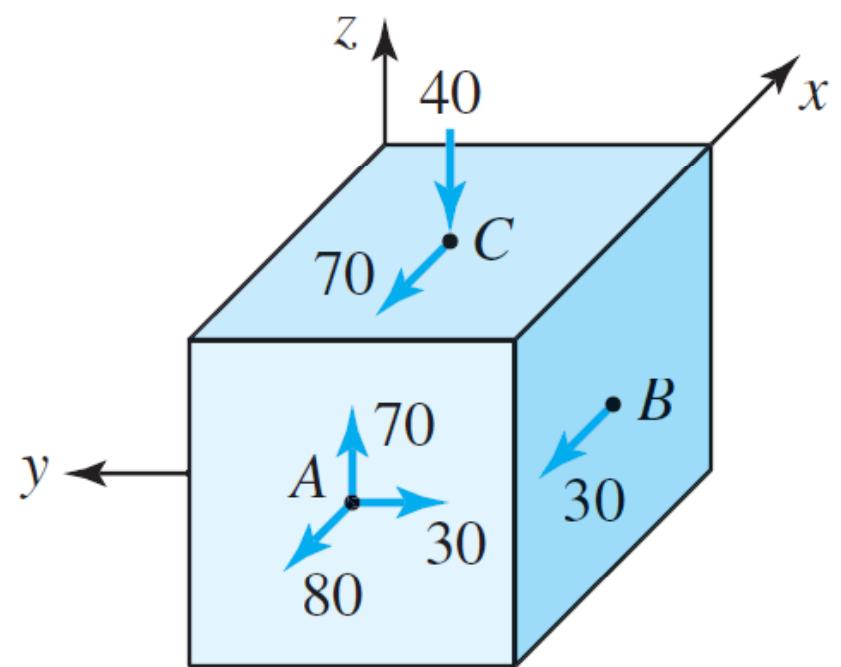
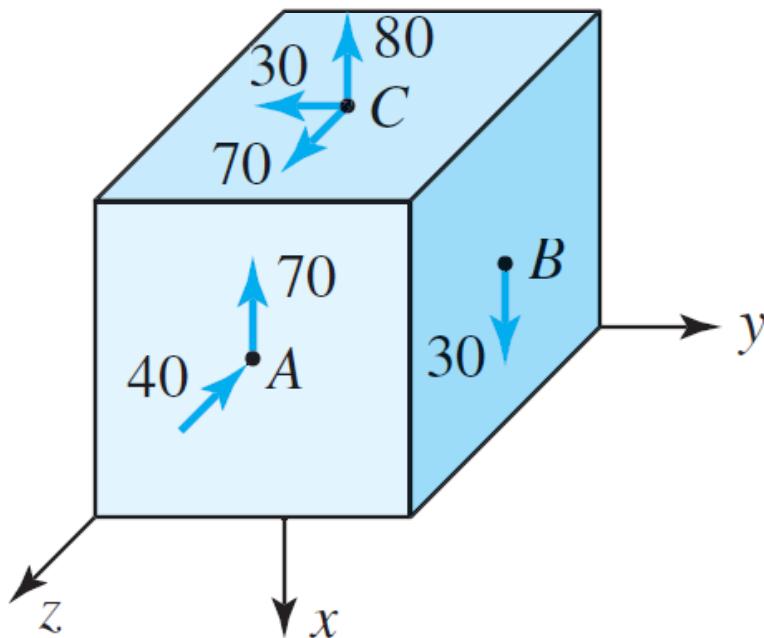


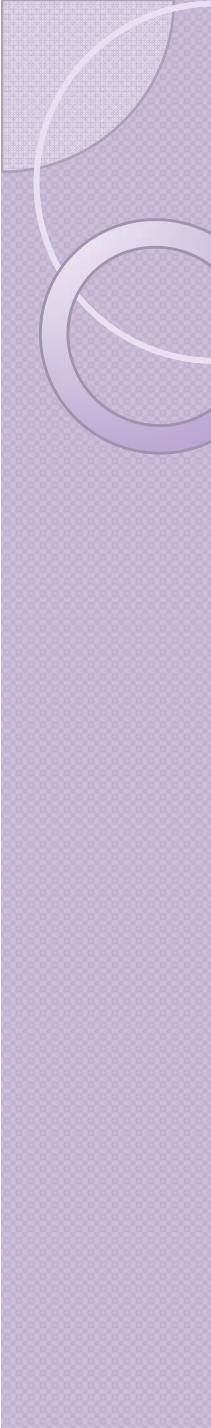
Cube 2



المان تنش

راهنمایی: با توجه به تنسور تنش ارائه شده، واضح است که تنش بصورت سه بعدی بوده و تنش صفحه‌ای نمیباشد.





فصل سوم:

کرنش

فصل سوم- کرنش

بخش‌های اصلی

- ۱) تغییر مکان و تغییر شکل
- ۲) کرنش لاغرانژین و اولرین
- ۳) کرنش نرمال
کرنش متوسط
کرنش برشی
- ۴) کاربرد کرنش کوچک
- ۵) مؤلفه های کرنش — کرنش صفحه ای
- ۶) کرنش در نقطه

هدف:

آشنایی با مفهوم کرنش و استفاده از تغییر شکلهای
تقریبی جهت محاسبه کرنشهای از تغییر مکانها

فصل سوم- کرنش

در شکل نخست، تسمه نوار نقاله هنگام نصب تا چه اندازه باید کشیده شود؟ هنگامیکه کابلهای شکل دوم به گیت ترافیکی متصل شده اند، بستهای قورباغه ای تا چه حد باید محکم شوند؟ بدیهی است که تسمه نوار و پیچهای بستهای قورباغه- ای به منظور ایجاد کشنش مناسب باید به حد کافی کشیده شوند.



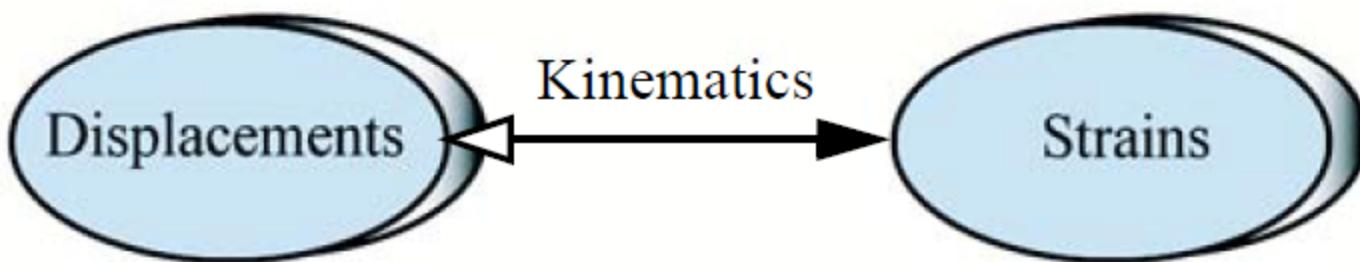
فصل سوم- کرنش



همانطور که در این فصل مشاهده خواهید کرد، "کرنش" معیاری برای ارائه مقدار تغییرشکل در طراحی بر اساس تغییرشکل میباشد.

فصل سوم- کرنش

- در واقع تغییر در شکل سازه را میتوان بصورت تغییرمکان نقاط سازه توصیف نمود. بنابراین رابطه میان کرنش و تغییرمکان مسئله هندسی میباشد. این رابطه که در شکل زیر نمایش داده شده است، در واقع حلقه ای از زنجیر ارتباط تغییرمکان به نیروهای خارجی میباشد.
- نخستین ابزار در بررسی ارتباط تغییرمکانها به کرنشهای، ترسیم تغییرشکل تقریبی جسم میباشد که مشابه رسم نمودار جسم آزاد هنگام تعیین نیروها میباشد.
- بعلاوه، در تحلیل سازه های معین و روابط همسازی نیاز به محاسبه کرنش میباشد.



فصل سوم - کرنش

(۱) تغییر مکان (Deformation) و تغییر شکل (Displacement)

- حرکت ناشی از نیروی اعمال شده بر سازه به دو دسته تقسیم می‌شود: الف) در حرکت جسم صلب، تمام جسم بدون تغییر شکل حرکت مینماید، ب) در حرکت مربوط به تغییر شکل، شکل جسم دستخوش تغییر می‌گردد. اما از کجا باید تشخیص داد که جسم دستخوش کدامیک از حرکتها شده است؟
- بنابر تعریف، در جسم صلب فاصله میان هیچ دو نقطه‌ای تغییر نمی‌کند. بعنوان مثال در جابجایی، خط سیر هر دو نقطه‌ای در جسم آزاد، ایجاد مسیرهای موازی مینماید و چنانچه فاصله میان دو خط سیر تغییر نماید، در اینصورت جسم متحمل تغییر شکل گردیده است.
- یک جسم علاوه بر تغییر مکان قادر به دوران نیز می‌باشد. در اجسام صلب، تمام خطوط با زاویه یکسان دوران مینمایند و چنانچه زاویه میان دو خط حین دوران تغییر نماید، جسم در حال تغییر شکل دادن می‌باشد.

فصل سوم - کرنش

- چه تغییرمکان میان دو نقطه در جسم تغییر نماید و چه زاویه میان دو خط آن، تغییرشکل بصورت حرکت نسبی نقاط یک جسم تعریف میگردد. تغییرمکان حرکت مطلق یک نقطه از جسم نسبت به یک چهارچوب مرجع ثابت میباشد، در حالیکه تغییرشکل، حرکت نسبی نسبت به نقاط دیگر در همان جسم میباشد.

(۳) کرنش لاغرانژین و اولرین (Lagrangian & Eulerian Strain)

- بهای یک کتاب در سال گذشته معادل ۱۰۰ هزار تومان و در سال ۱۲۵ هزار تومان میباشد. درصد تغییرات قیمت کتاب چه مقدار میباشد؟ هر دو پاسخ زیر صحیح میباشند:
 - قیمت کتاب ۰.۲۵٪ بیش از سال گذشته میباشد.
 - قیمت کتاب در سال گذشته ۰.۲۰٪ کمتر از قیمت امروزی آن بوده است.

فصل سوم - کرنش

- عبارت اول، قیمت اولیه کتاب را بعنوان مرجع در نظر گرفته است:

$$[(L_f - L_0)/L_0] \times 100$$

- در حالیکه عبارت دوم، قیمت نهایی را بعنوان مرجع در نظر میگیرد:

$$[(L_0 - L_f)/L_f] \times 100$$

- این دو مقدار نشان دهنده اهمیت تعیین مرجع در محاسبه تغییرات یک مقدار است. در مفهوم کرنش، این حقیقت منجر به دو تعریف زیر میگردد:

- **کرنش لاغرانژین:** هندسه تغییرشکل نیافته اولیه را بعنوان مرجع محاسبات کرنش در نظر میگیرد.

- **کرنش اولرین:** هندسه تغییرشکل یافته نهایی را بعنوان مرجع محاسبات در نظر میگیرد.

- تعبیر لاغرانژی غالبا در مکانیک جامدات کاربرد دارد، حال آنکه کرنش اولری در مکانیک سیالات پرکاربرد میباشد. در اینجا کرنش لاغرانژی مورد بحث خواهد بود.

فصل سوم - کرنش

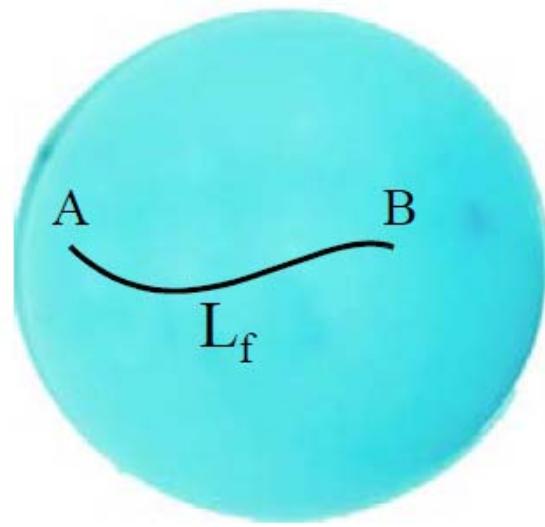
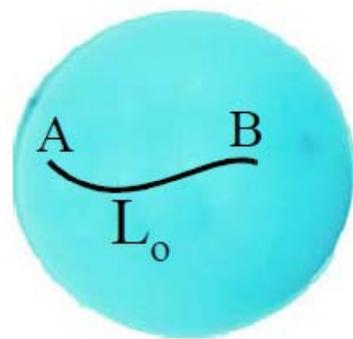
(۳) کرنش متوسط (Average Strain)

- در بخش اول دریافتیم که جهت تفکیک حرکت تغییرشکلی جسم از تغییرمکانی آن، نیاز به محاسبه تغییرات در طول داریم. به همین ترتیب جهت تفکیک تغییرمکان دورانی از تغییرشکل نیز نیاز به محاسبه تغییرات زاویه داریم. در این قسمت کرنشهای نرمال و برشی که بترتیب مقادیر تغییرات طول و زاویه هستند مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱-۳ کرنش نرمال (Normal Strain)

- در بادکنک شکل زیر با باد کردن بادکنک، طول خط AB بطول L_0 افزایش می-یابد. تغییر طول $L_f - L_0$ معرف تغییرشکل خط مزبور میباشد. تنش نرمال متوسط برابر است با نسبت تغییرشکل خط به طول اولیه خط. پارامتر اپسیلون بیانگر کرنش نرمال میباشد.
- چنانچه طول یک قطعه افزایش یابد، کرنش مثبت و چنانچه کاهش یابد، کرنش منفی در نظر گرفته میشود.

فصل سوم- کرنش



$$\varepsilon_{av} = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

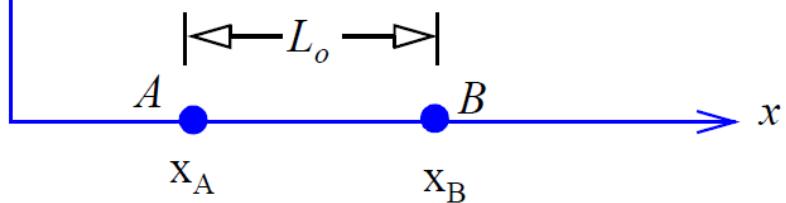
- رابطه فوق را میتوان بصورت زیر نوشت که پارامتر دلتا برابر با تغییر طول عضو میباشد:

$$\varepsilon_{av} = \frac{\delta}{L_0}$$

فصل سوم - کرنش

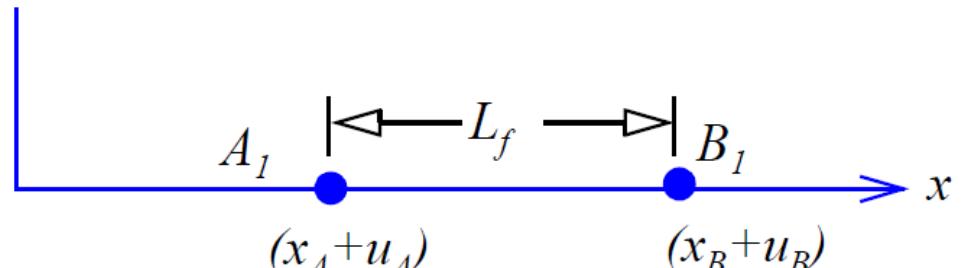
- حال یک حالت خاص و پرکاربرد از کرنش نرمال مورد بررسی قرار میگیرد که طی آن، تغییرمکانها در راستای یک طول مستقیم میباشند. دو نقطه A و B را در خط شکل زیر که در راستای x میباشد، در نظر بگیرید. نقاط A و B به نقاط A₁ و B₁ منتقل میشنوند. موقعیت جدید این نقاط در شکل نشان داده شده و بنابراین مقدار طول جدید آنها (A₁B₁) برابر با L_f میباشد. رابطه کرنش متوسط دی اینحالت

تصویر زیر خواهد بود:



$$L_0 = x_B - x_A$$

$$\varepsilon_{av} = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A}$$

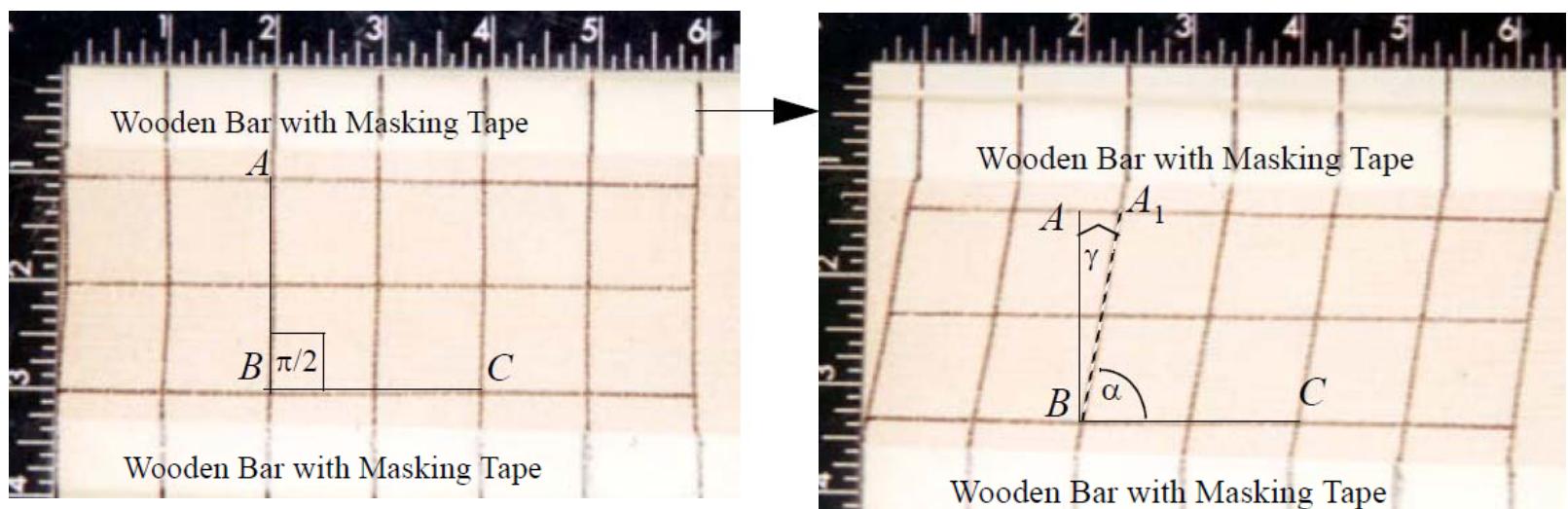


$$L_f = (x_B + u_B) - (x_A + u_A) = L_o + (u_B - u_A)$$

فصل سوم - کرنش

۲-۳ کرنش برشی (Shear Strain)

- در شکل زیر یک باند الاستیک مشبک نشان داده شده است که دو نوار چوبی برچسب دار در بالا و پایین آن قرار گرفته اند. با ثابت نگه داشتن نوار چوبی پایین، نوار بالایی را به سمت راست میکشیم. همانطور که در شکل نشان داده شده است، زاویه ABC از حالت قائمه خارج شده و تغییر می یابد. زاویه آلفا، زاویه نهایی میان دو خط پس از تغییرشکل میباشد. دقت نمایید که در تعریف کرنش برشی، افزایش در زاویه آلفا برابر با کرنش منفی، و کاهش در آن معادل کرنش مثبت فرض میشود.



$$\gamma_{av} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

فصل سوم - کرنش

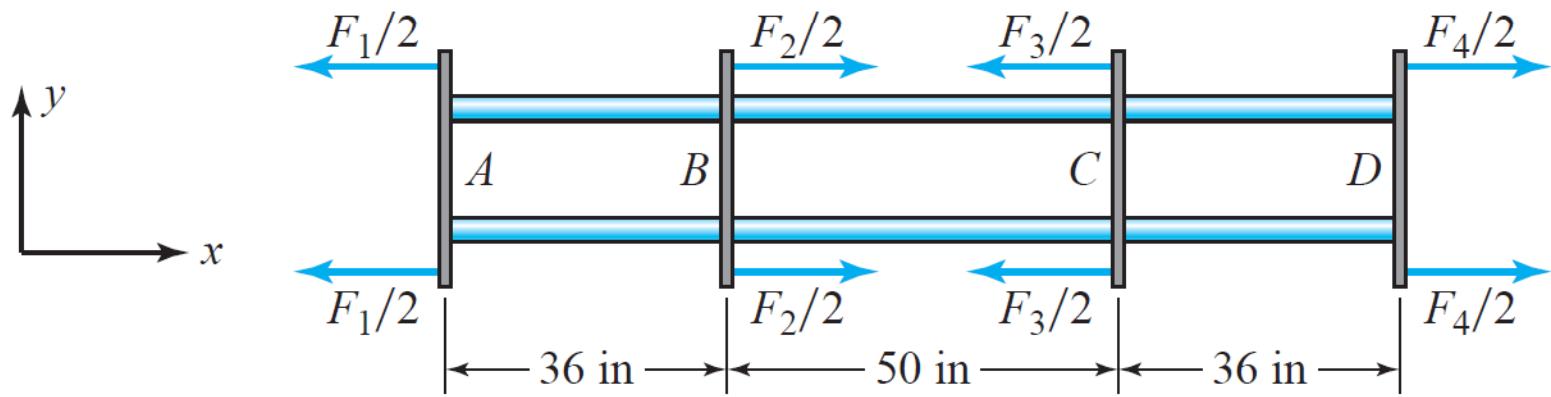
۳-۳ واحد تنش متوسط

- همانطور که از روابط فوق بر می آید، کرنش کمیتی بدون بعد میباشد و جهت تفکیک آن از کرنش نقطه ای که بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت، بصورت in/in یا cm/cm و یا mm/mm بیان میشود. برای کرنش زاویه ای نیز از واحد رادیان استفاده میشود.

مثال (۱-۳) تغییرمکان راستای x برای ورقهای صلب شکل زیر ارائه شده است. کرنش محوری میله را در مقاطع AB، BC و CD مشخص نمایید.

$$u_A = -0.0100 \text{ in.} \quad u_B = 0.0080 \text{ in.}$$

$$u_C = -0.0045 \text{ in.} \quad u_D = 0.0075 \text{ in.}$$



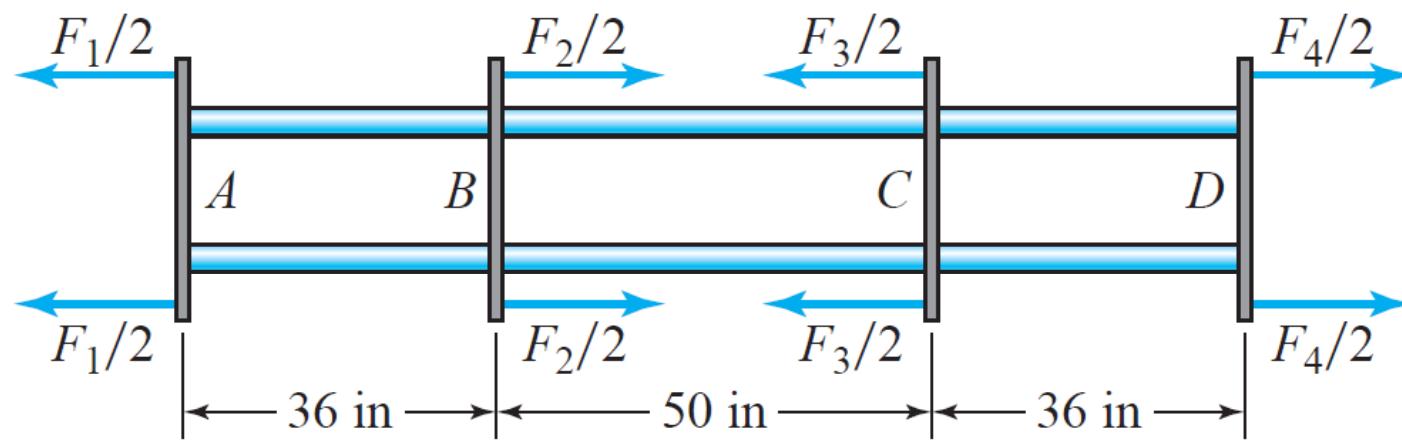
فصل سوم - کرنش

حل: ابتدا در هر یک از مقاطع جابجایی نسبی گردیده و با استفاده از روابط کرنش، مقدار کرنش محاسبه میگردد:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A} = \frac{0.018 \text{ in.}}{36 \text{ in.}} = 0.0005 \frac{\text{in.}}{\text{in.}} \quad \varepsilon_{AB} = 500 \text{ } \mu\text{in./ in.}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{u_C - u_B}{x_C - x_B} = \frac{-0.0125 \text{ in.}}{50 \text{ in.}} = -0.00025 \frac{\text{in.}}{\text{in.}} \quad \varepsilon_{BC} = -250 \text{ } \mu\text{in./ in.}$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{u_D - u_C}{x_D - x_C} = \frac{0.012 \text{ in.}}{36 \text{ in.}} = 0.0003333 \frac{\text{in.}}{\text{in.}} \quad \varepsilon_{CD} = 333.3 \text{ } \mu\text{in./ in.}$$

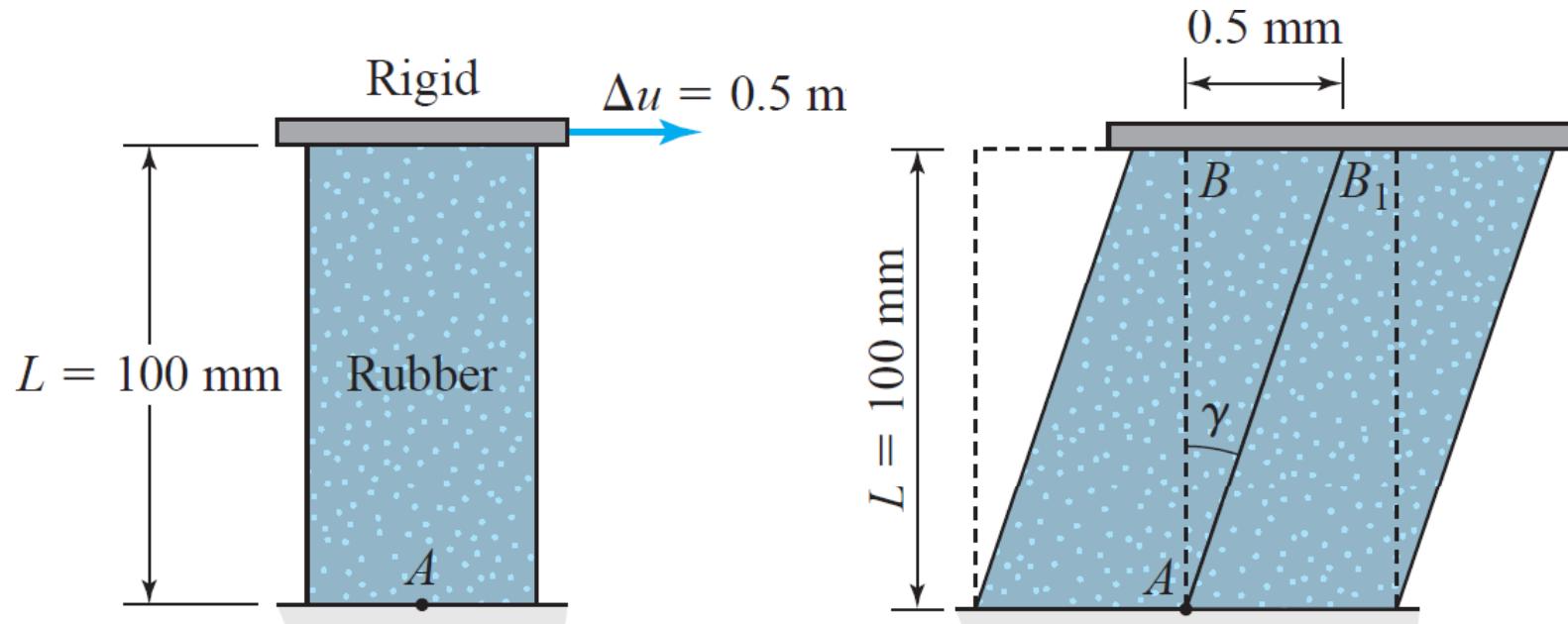


فصل سوم - کرنش

مثال (۲-۳) میله پلاستیکی محکمی از یک انتهای بیک صفحه صلب ثابت متصل شده و انتهای دیگر آن نیز به صفحه صلبی که نسبت به صفحه ثابت به سمت راست حرکت میکند، متصل گردیده است. مقدار کرنش متوسط برشی را در نقطه A تعیین نمایید؟

حل: با حرکت صلب بالایی، مستطیل زیر به متوازی الاضلاع تبدیل میگردد و با محاسبه تغییرات زاویه میتوان مقدار کرنش برشی را محاسبه نمود:

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{BB_1}{AB} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.5 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} \right) = 0.005 \text{ rad}$$

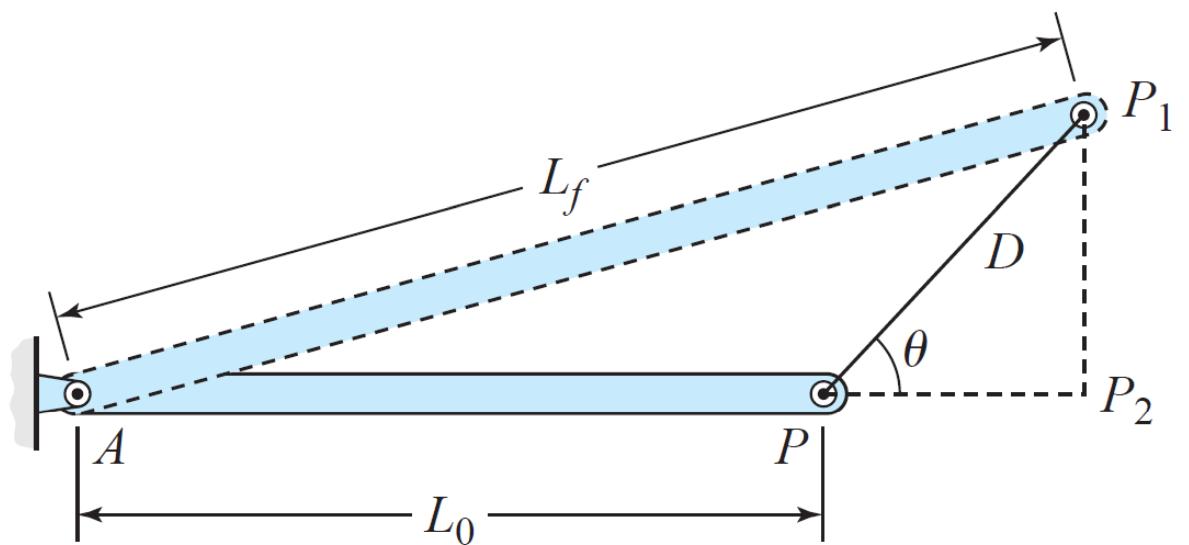


فصل سوم - کرنش

۴) تقریب کرنش متوسط

- در بسیاری از سازه‌ها، سازه متحمل تغییرشکل‌های کوچکی می‌شود و در اینجا با ارائه یک مثال، ساده سازی‌های مهندسی را در کرنشهای کوچک نشان میدهیم. در شکل زیر بسته به نیروی اعمال شده، نقطه P به میزان D و با زاویه θ ترا جابجا می‌گردد. طول نهایی با استفاده از روابط مثلثاتی بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$L_f = \sqrt{L_0^2 + D^2 + 2L_0D\cos\theta} = L_0 \sqrt{1 + \left(\frac{D}{L_0}\right)^2 + 2\left(\frac{D}{L_0}\right)\cos\theta}$$



فصل سوم - کرنش

- کرنش نرمال میله AP بصورت زیر محاسبه میگردد:

$$\varepsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{D}{L_0}\right)^2 + 2\left(\frac{D}{L_0}\right)\cos\theta} - 1$$

- رابطه فوق بدون توجه به مقدار D معتبر میباشد. حال فرض کنید که مقدار D/L_0 کوچک باشد، باین ترتیب میتوان از مقدار توان دوم این کسر صرفنظر نمود و مقدار رادیکال را بصورت بسط دو جمله ای بصورت زیر نمایش دهیم. دقیق نمایید که بسط دو جمله ای برای مقادیر کوچک d بصورت زیر نمایش داده میشود، که با صرفنظر از جملات مرتبه بالاتر عبارت نهایی زیر حاصل میشود::

$$(1 + d)^{1/2} = 1 + d/2 + \text{terms of } d^2 \text{ and higher order}$$

$$\varepsilon \approx \left(1 + \frac{D}{L_0}\cos\theta + \dots + \dots\right) - 1 \quad \varepsilon_{\text{small}} = \frac{D\cos\theta}{L_0}$$

فصل سوم - کرنش

اما معنای دقیق کرنش کوچک چیست؟ برای پاسخ به این سوال در جدول زیر، مقادیر کرنش دقیق و تقریبی با استفاده از روابط فوق برای زاویه ۴۵ درجه محاسبه گردیده است. همانطور که مشاهده میشود برای کرنشهای کمتر از ۱٪ خطای کمتر از ۰.۱٪ میباشد که در مسائل مهندسی تقریب خوبی است.

جدول تقریب کرنش کوچک

| $\varepsilon_{\text{small}}$, [Equation (2.6)] | ε , [Equation (2.5)] | % Error, $\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{\text{small}}}{\varepsilon}\right) \times 100$ |
|---|----------------------------------|---|
| 1.000 | 1.23607 | 19.1 |
| 0.500 | 0.58114 | 14.0 |
| 0.100 | 0.10454 | 4.3 |
| 0.050 | 0.00512 | 2.32 |
| 0.010 | 0.01005 | 0.49 |
| 0.005 | 0.00501 | 0.25 |
| 0.001 | 0.00100 | 0.05 |

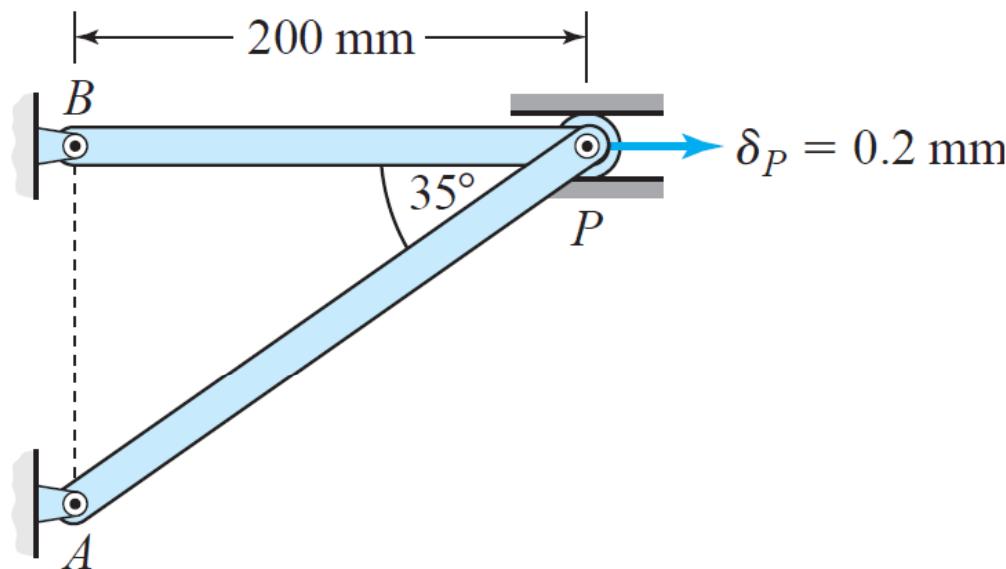
فصل سوم - کرنش

- بطور کلی موارد زیر را در بحص کرنشهای کوچک میتوان نتیجه گیری نمود:
 - ۱) تقریب کرنش کوچک را میتوان برای کرنشهای کمتر از ۱٪ لحاظ نمود.
 - ۲) محاسبات کرنش کوچک منجر به تحلیل خطی تغییرشکل میگردد.
 - ۳) کرنش نرمال کوچک با استفاده از مولفه تغییرشکل در راستای اولیه المان خط محاسبه میگردد، بدون توجه به جهت المان خط تغییرشکل یافته.
 - ۴) در محاسبات کرنشهای برشی کوچک تقریبیهای زیر برای توابع مثلثاتی در نظر گرفته میشوند:
 $\tan \gamma \approx \gamma, \sin \gamma \approx \gamma, \text{ and } \cos \gamma \approx 1$

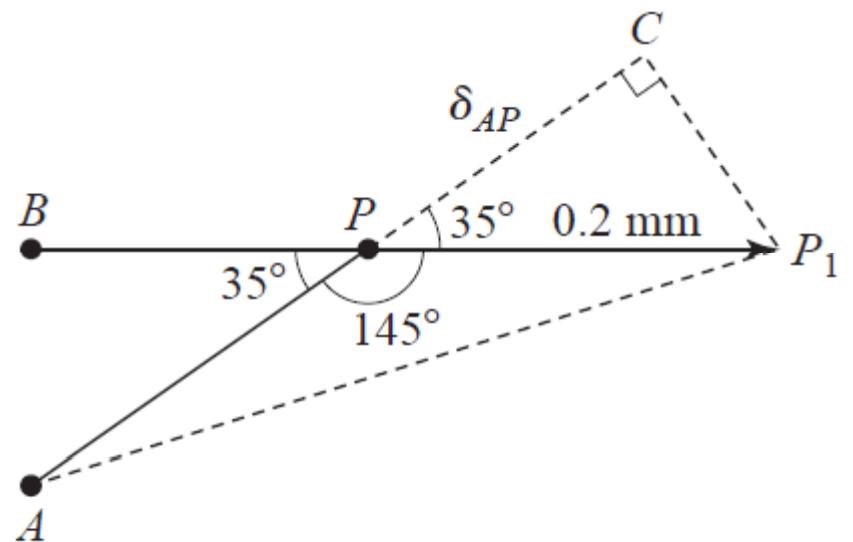
فصل سوم - کرنش

تمرین (۱-۳) دو میله مطابق شکل زیر به یک غلطک متصل شده اند. کرنش میله AP را با استفاده از (الف) روابط بدون تقریب کرنش کوچک، (ب) روابط با تقریب کرنش محاسبه نمایید؟

راهنمایی: حل این سوال با رسم شکل تغییرشکل یافته سازه بطور اغراق یافته مشخص میگردد.



فصل سوم - کرنش



$$AP_1 = \sqrt{AP^2 + PP_1^2 - 2(AP)(PP_1)\cos 145^\circ} = 244.3188 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{AP} = \frac{AP_1 - AP}{AP} = \frac{244.3188 \text{ mm} - 244.155 \text{ mm}}{244.155 \text{ mm}} = 0.67112(10^{-3}) \text{ mm/mm}$$

$$\delta_{AP} = 0.2 \cos 35^\circ = 0.1638 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{AP} = \frac{\delta_{AP}}{AP} = \frac{0.1638 \text{ mm}}{244.155 \text{ mm}} = 0.67101(10^{-3}) \text{ mm/mm}$$

فصل سوم - کرنش

۵) مؤلفه های کرنش

فرض کنید u ، v و w ، بترتیب تغییرمکانهای راستای x ، y و z باشند. روابط زیر مؤلفه های کرنش متوسط مهندسی را نشان میدهند:

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta y} = \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\Delta v}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

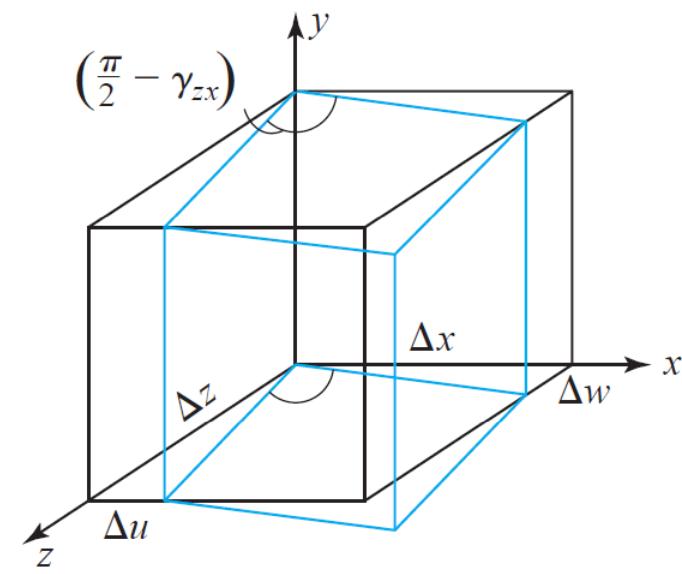
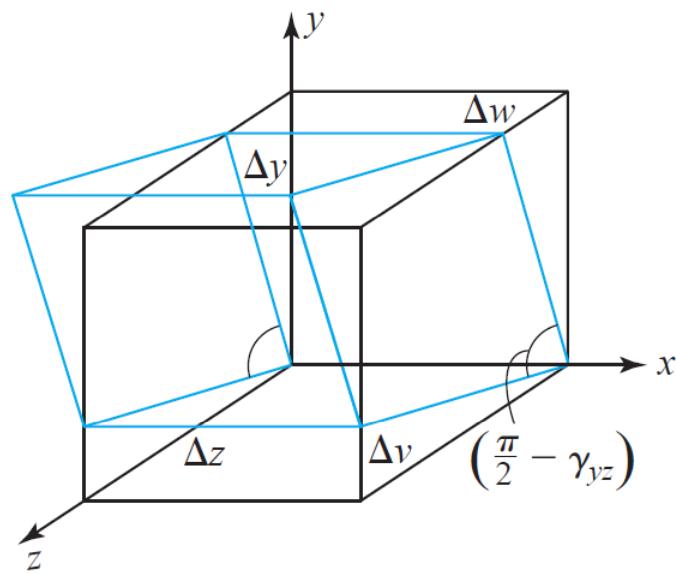
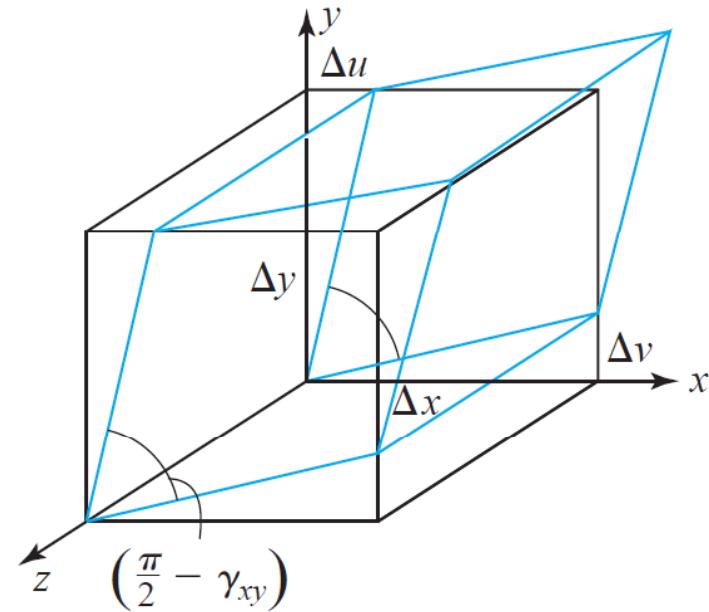
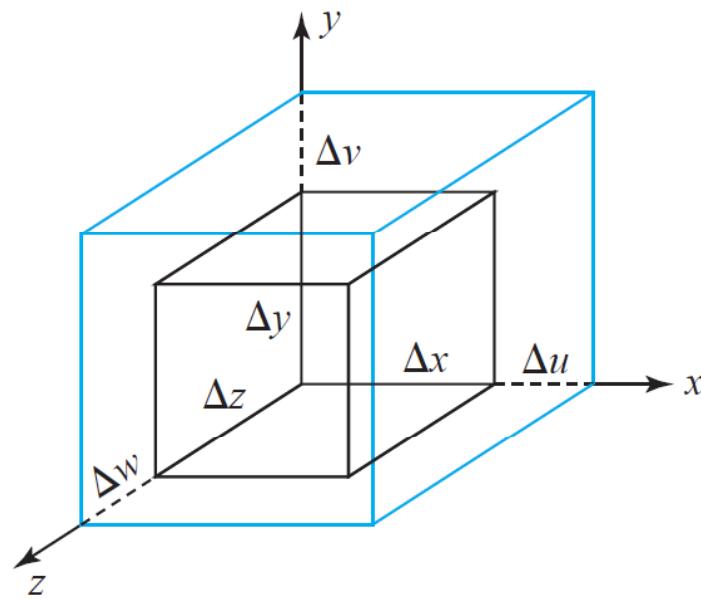
$$\gamma_{zy} = \frac{\Delta w}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta z} = \gamma_{yz}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\Delta w}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\Delta u}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta x} = \gamma_{zx}$$

فصل سوم - کرنش



فصل سوم - کرنش

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تنسور زیر نیز بیانگر کرنش صفحه ای میباشد:

مثال (۳-۳) تغییر مکان گوشه های مستطیل زیر در دو راستای متعامد اندازه گیری و ارائه شده اند. کرنش نرمال در دو راستا و کرنش برشی را محاسبه نمایید؟

$$u_A = -0.0100 \text{ mm}$$

$$u_B = -0.0050 \text{ mm}$$

$$u_C = 0.0050 \text{ mm}$$

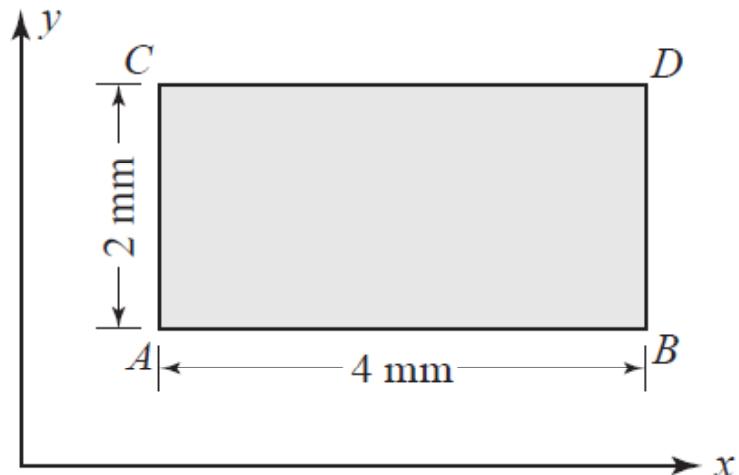
$$u_D = 0.0100 \text{ mm}$$

$$v_A = 0.0100 \text{ mm}$$

$$v_B = -0.0112 \text{ mm}$$

$$v_C = 0.0068 \text{ mm}$$

$$v_D = 0.0080 \text{ mm}$$



فصل سوم - کرنش

حل: نقطه A بعنوان نقطه مرجع در نظر گرفته میشود و حرکت نسبی سایر نقاط نسبت به این نقطه محاسبه میگردد و سپس کرنشها محاسبه میگردند:

$$u_B - u_A = 0.0050 \text{ mm} \quad v_B - v_A = -0.0212 \text{ mm}$$

$$u_C - u_A = 0.0150 \text{ mm} \quad v_C - v_A = -0.0032 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A} = \frac{0.0050 \text{ mm}}{4 \text{ mm}} = 0.00125 \text{ mm/mm}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{v_C - v_A}{y_C - y_A} = \frac{-0.0032 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} = -0.0016 \text{ mm/mm}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{v_B - v_A}{x_B - x_A} + \frac{u_C - u_A}{y_C - y_A} = \frac{-0.0212 \text{ mm}}{4 \text{ mm}} + \frac{0.0150 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} = 0.0022 \text{ rad}$$