

تجزیه و تحلیل نیروهای داخلی در قاب‌ها به دلیل تفاوت دما با استفاده از روش نیرو



اگر یک سازه نامعین در معرض تغییر دما قرار گیرد، فشارهای داخلی در آن به وجود می‌آید. این امر می‌تواند در سازه‌هایی مانند برج‌های خنک‌کننده و دودکش‌ها دیده شود، جایی که درجه حرارت داخلی و خارجی متفاوت است. این بدان معناست که درجه حرارت در دو انتهای مقطع مشابه نیست و از آنجا که سازه محدود شده است، تنش‌های داخلی به دلیل کرنش حرارتی ایجاد می‌شوند. ما می‌توانیم از روش نیرو به منظور به دست آوردن چنین تنش‌هایی استفاده کنیم تا طرح‌های مناسبی ایجاد کنیم.

به جای معادله استاندارد عادی برای بار اعمال‌شده خارجی، اکنون ما شرایط تغییر شکل ناشی از تغییر حرارت را جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2t} &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} &= 0 \end{aligned}$$

تغییر شکل یک ساختار در یک نقطه به دلیل اختلاف دما به شرح زیر معین می‌شود:

$$\Delta_i t = \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds + \alpha t_{av} \int \bar{N} ds$$

که در آن:

α = ضریب انبساط حرارتی مصالح

h = عمق عضو

Δt = تغییر دما

$$T_{av} = \text{دمای متوسط برای عضو}$$

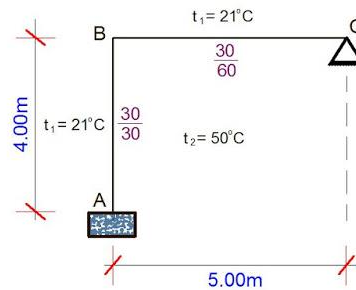
$$= \int M ds = \text{مساحت نمودار لنگر خمشی برای عضو}$$

$$= \int N ds = \text{مساحت نمودار نیروی محوری برای عضو}$$

به‌طور خلاصه مراحل زیر را طی کنید:

- ۱) درجه نامعینی سازه را تعیین کنید و معادله استاندارد مناسب را بنویسید.
- ۲) سیستم پایه یا اولیه خود را طبق معمول بکشید.
- ۳) نمودارهای واحد لنگر خمشی، برش و نیروی محوری را به دست آورید.
- ۴) جابه‌جایی‌ها را با استفاده از روش انتگرال مور یا روش ورشچاگین (Vereschagin) محاسبه کنید.
- ۵) شرایط آزاد معادله استاندارد را محاسبه کنید. (جابه‌جایی به دلیل اختلاف دما)
- ۶) معادله استاندارد را حل کنید.
- ۷) نمودار تنش‌های درونی را ترسیم کنید.

مثال حل شده



همان‌طور که در بالا نشان داده شده است، یک قاب متحرک در پایه‌ی ستون A ثابت شده و در انتهای میله‌ی C متصل شده است. ستون قاب دارای یک مقطع $30 \text{ Cm} \times 30 \text{ Cm}$ است در حالی که تیر دارای ارتفاع 60 Cm و عرض 30 Cm است. دما درون قاب (t_1) برابر با 50°C است، در حالی که دمای خارج (t_2) برابر با 21°C می‌باشد. برای تفاوت دمایی روی قاب نمودار لنگر خمشی، نیروی برشی و نیروی محوری را رسم کنید.

$$(E = 2.17 \times 10^7 \text{ KN/m}^2, \alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}).$$

راه حل:

خصوصیات هندسی و داده‌های دما:

$$I_c = (bh^3)/12 = (0.3 \times 0.3^3)/12 = 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \text{ اینرسی ستون}$$

$$I_B = (bh^3)/12 = (0.3 \times 0.6^3)/12 = 5.4 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \text{ اینرسی تیر}$$

ما تمایل داریم که در روابط با I_C مانند $I_C/I_B = 0.125$ کار کنیم.

$$EI_C = (2.17 \times 10^7) \times (6.75 \times 10^{-4}) = 14647.5 \text{ KNm}^2 \text{ ستون خمشی}$$

برای قاب بالا:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 50 - 21 = 29^\circ\text{C}; t_{av} = (50 + 21)/2 = 35.5^\circ\text{C}$$

$$\Delta t/h = 29/0.3 = 96.667 \text{ : برای عضو AB}$$

$$\Delta t/h = 29/0.6 = 48.333 \text{ : برای عضو BC}$$

سیستم اصلی (پایه)

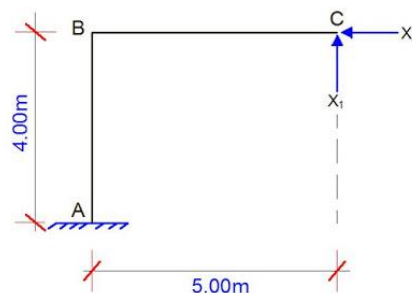
گام بعدی در تجزیه و تحلیل این است که سازه را به یک سیستم اصلی تقلیل دهیم؛ که سیستمی است که باید از نظر استاتیکی معین و پایدار باشد. قاب از نظر ایستایی تا درجه دوم نامعین است؛ این امر بدان معناست که ما دو تکیه‌گاه اضافی را حذف خواهیم کرد.

درجه نامعینی استاتیکی به شرح زیر به دست می‌آید:

$$R_D = (3m + r) - 3n - s \text{ ----- (2)}$$

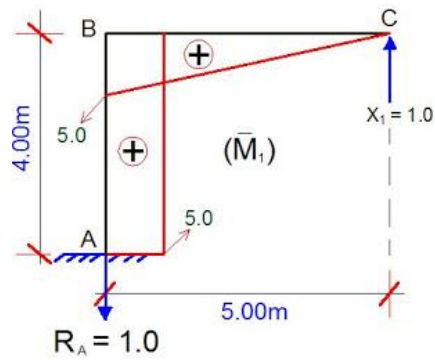
$$R_D = (3 \times 2) + 5 - (3 \times 3) - 0 = 2 \text{ بنابراین}$$

به صورت انتخابی، همان طور که در زیر نشان داده شده است تصمیم می‌گیریم که دو نیروی واکنشی در تکیه‌گاه C از قاب را برای به دست آوردن سیستم پایه حذف کنیم.

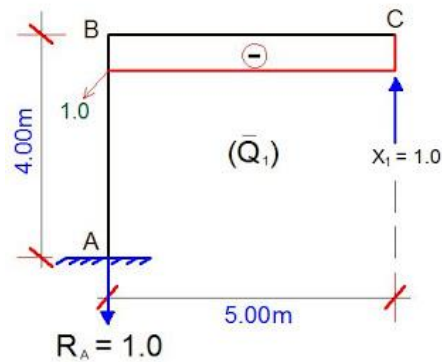


$$\text{تجزیه و تحلیل مورد ۱: } X_2 = 0, X_1 = 1.0$$

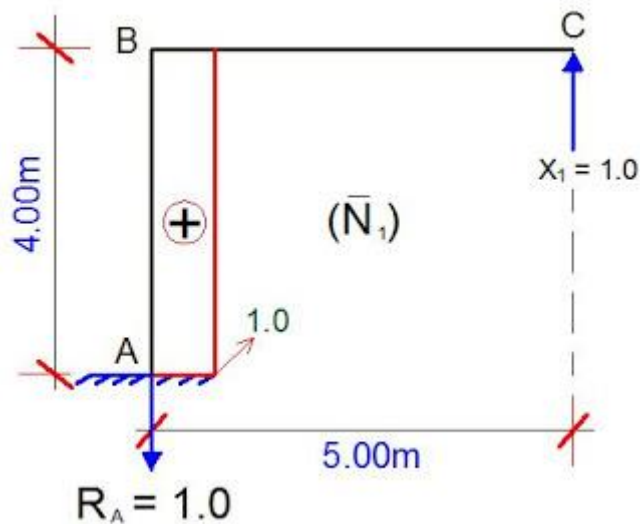
تجزیه و تحلیل ساده استاتیکی سازه بارگذاری شده با بارگذاری مورد ۱ از نظر نمودار تنش داخلی در زیر نشان داده شده است.



(a) نمودار لنگر خمشی



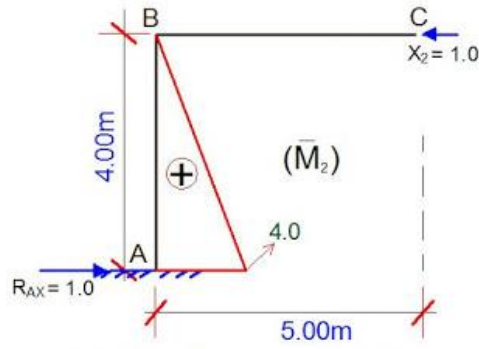
(b) نمودار نیروی برش



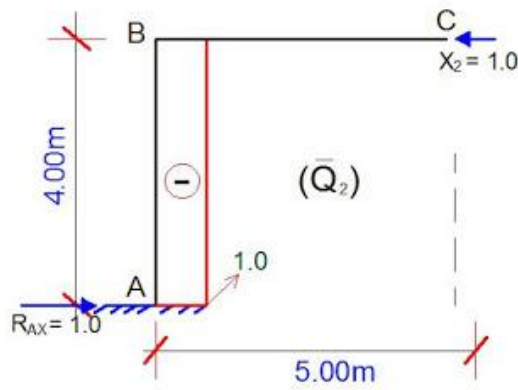
(c) نمودار نیروی محوری

تجزیه و تحلیل مورد ۲: $X_1=0$ ، $X_2 = 1.0$

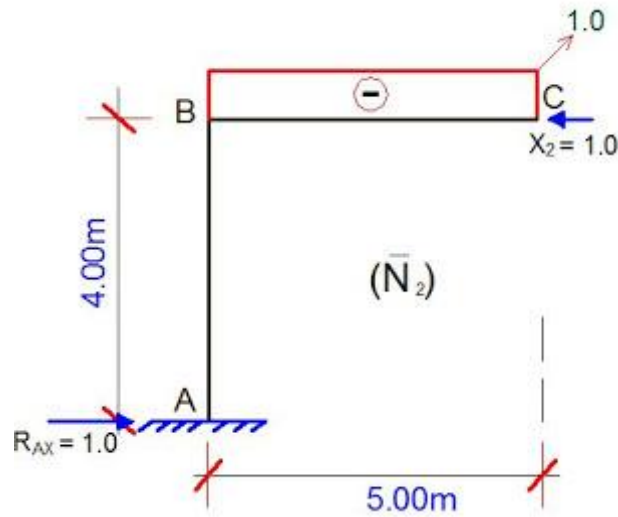
تجزیه و تحلیل ساده استاتیکی سازه بارگذاری شده با بارگذاری مورد ۱ بارگیری از نظر نمودار تنش داخلی در زیر نشان داده شده است.



(a) نمودار لنگر خمشی



(b) نمودار نیروی برشی



(c) نمودار نیروی محوری

بنابراین معادله استاندارد مناسب برای این سازه به شرح زیر است:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0$$

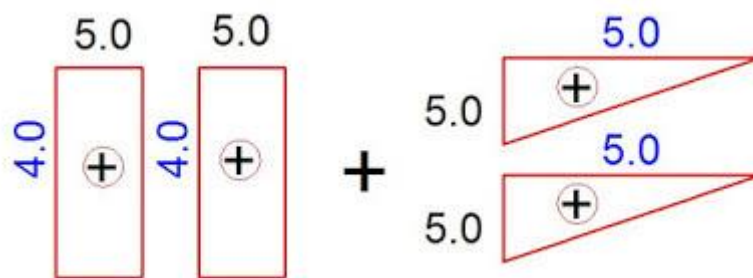
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0$$

محاسبه ضریب تأثیر

ضریب نفوذ مبتنی بر انتگرال موهر $\delta_i = 1/EI \int M m ds$ است. هنگامی که می‌خواهیم با استفاده از روش گرافیکی (با استفاده از نمودارهای لنگر خمشی) این کار را انجام دهیم، به صورت مستقیم از قواعد ورشچاگین استفاده می‌کنیم. طبق این قواعد هنگامی که ما دو نمودار را که یکی باید فرم خطی (به دلیل بار واحد) داشته باشد و دیگری با هر شکل دیگری ترکیب می‌کنیم، معادله انتگرال موهر با ضرب مساحت در بعد قائم (عرض) به دست می‌آید.

δ_{11} (تغییر شکل در نقطه ۱ به علت بار واحد در نقطه ۱)

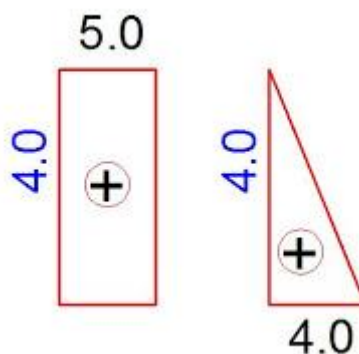
این امر توسط لنگر خمشی مورد ۱ در ترکیب با خودش به دست می‌آید که در زیر نشان داده شده است.



$$\delta_{11} = (5 \times 5 \times 4) + (1/3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 0.125) = 105.208$$

$\delta_{21} = \delta_{12}$ (بر اساس قاعده مکسول و قانون بتی، تغییر شکل در نقطه ۲ ناشی از بار واحد در نقطه ۱ است که برابر با تغییر شکل در نقطه ۱ به علت بار واحد در نقطه ۲ می‌باشد).

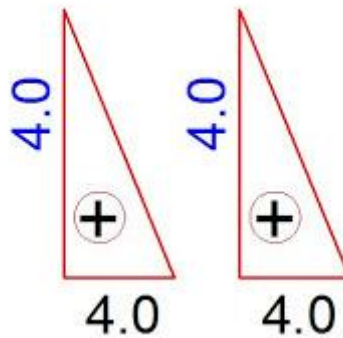
این امر از طریق نمودار لنگر خمشی مورد ۱ در ترکیب با نمودار لنگر خمشی مورد ۲ به دست می‌آید. این موضوع در زیر نشان داده شده است.



$$\delta_{21} = (1/2 \times 5 \times 4 \times 4) = 40$$

δ_{22} (تغییر شکل در نقطه ۲ به علت بار واحد در نقطه ۲)

این امر توسط نمودار لنگر خمشی مورد ۲ در ترکیب با خودش به دست می‌آید که در زیر نشان داده شده است.



$$\delta_{22} = (1/3 \times 4 \times 4 \times 4) = 21.333$$

ضریب تأثیر ناشی از تغییرات دما

مورد ۱ (نگاهی به نمودارهای لنگر خمشی و نیروی محوری بیندازید).

$$\Delta_{1t}/EI_c = \alpha \Delta t/h \int M ds + \alpha t_{av} \int N ds$$

با در نظر گرفتن طرف اول معادله برای بخش‌های AB و BC داریم:

$$= [(11 \times 10^{-6} \times 96.667 \times 5 \times 4) + (11 \times 10^{-6} \times 48.333 \times (1/2) \times 5 \times 4)] = 0.02791$$

با در نظر گرفتن طرف دوم از معادله برای بخش AB داریم:

$$= (11 \times 10^{-6} \times 35.5 \times 1 \times 4) = 0.001562$$

از این رو:

$$\Delta_{1t} = \alpha \Delta t/h \int M ds + \alpha t_{av} \int N ds = 0.02791 + 0.001562 = 0.029473 EI_c$$

$$\Delta_{1t} = 0.029473 \times 14647.5 = 431.691$$

مورد ۲ (نگاهی به نمودارهای لنگر خمشی و نیروی محوری بیندازید).

$$\Delta_{2t}/EI_c = \alpha \Delta t/h \int M ds + \alpha t_{av} \int N ds$$

با در نظر گرفتن بخش اول معادله برای عضو AB داریم:

$$= (11 \times 10^{-6} \times 96.667 \times (1/2) \times 4 \times 4) = 0.0085067$$

با در نظر گرفتن بخش دوم معادله برای عضو BC داریم:

$$= (11 \times 10^{-6} \times 35.5 \times -1 \times 5) = -0.0019525$$

از این رو:

$$\Delta_{2t} = \alpha \Delta t/h \int M ds + \alpha t_{av} \int N ds = 0.0085067 - 0.0019525 = 0.0065542 EI_c$$

$$\Delta_{2t} = 0.0065542 \times 14647.5 = 96.0026$$

اکنون معادله استاندارد مناسب برابر می‌شود با:

$$105.208X_1 + 40X_2 = -431.691$$

$$40X_1 + 21.333X_2 = -96.0026$$

در حل معادلات به صورت هم‌زمان: $X_1 = -8.332 \text{ KN}$; $X_2 = 11.122 \text{ KN}$

مقدار نهایی تنش داخلی از طریق معادلات زیر به دست می‌آید:

$$M_{\text{def}} = M_1X_1 + M_2X_2$$

$$Q_{\text{def}} = Q_1X_1 + Q_2X_2$$

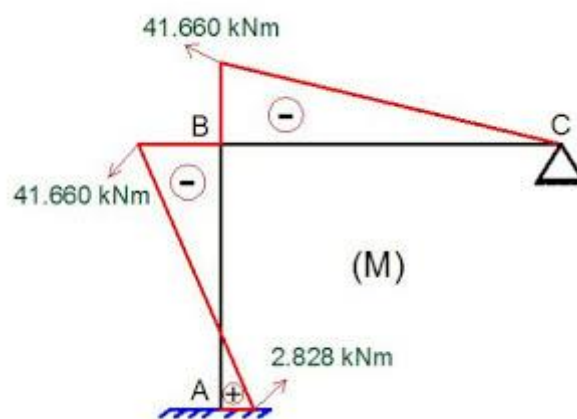
$$N_{\text{def}} = N_1X_1 + N_2X_2$$

خمش نهایی (M_{def})

$$M_A = (-8.332 \times 5) + (11.122 \times 4) = 2.828 \text{ KNm}$$

$$M_B = (-8.332 \times 5) = -41.660 \text{ KNm}$$

$$M_C = 0 = \text{تکیه‌گاهی مفصلی}$$

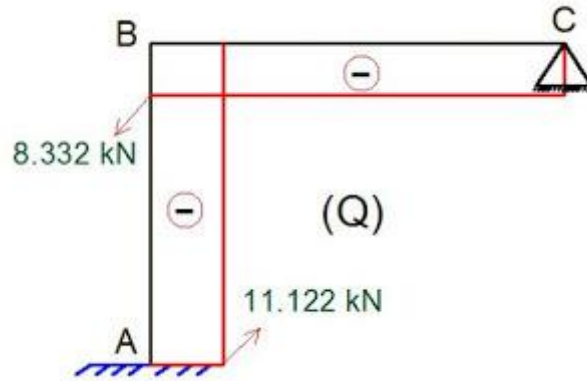


(a) نمودار لنگر خمشی

نیروی برش نهایی (Q_{def})

$$Q_A - Q_B^B = (11.122 \times -1) = -11.122 \text{ KN}$$

$$Q_B^R - Q_C^L = (-8.332 \times 1) = -8.332 \text{ KN}$$

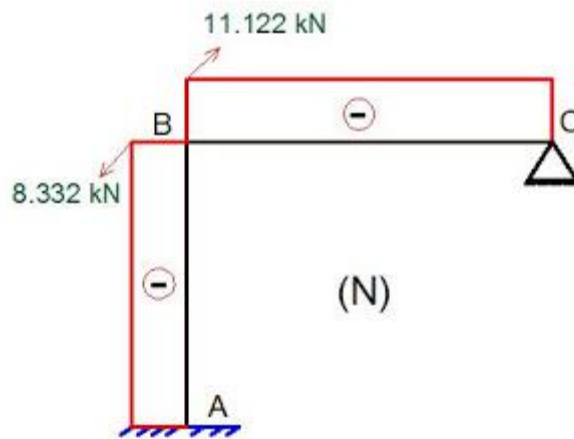


(b) نمودار نیروی برشی

نیروی محوری نهایی (N_{def})

$$N_A - N_B^B = (-8.332 \times 1) = -8.332 \text{ KN}$$

$$N_B^R - N_C^L = (11.122 \times -1) = -11.122 \text{ KN}$$



(c) نمودار نیروی محوری

مترجم: انسبه صالحی

منبع:

<http://www.structville.com/2016/04/analysis-of-internal-forces-in-frames.html>