

## تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی

## چکیده

در این یادداشت تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی شرح داده شده است و مفهوم تحلیل غیرخطی درک خواهد شد. همچنین فواید انتخاب روش تحلیل مناسب بیان می‌گردد و شرح داده خواهد شد که عدم لحاظ نمودن آنالیز غیرخطی خطاهای جدی را در طراحی منجر خواهد شد و بیان می‌گردد که تحلیل غیرخطی چگونه به طراحی سازه‌های بهینه‌تر خواهد انجامید.

## مقدمه

در طول دهه‌های گذشته تحلیل به روش اجزای محدود از یک ابزار صرفاً تحلیلی وارد دنیای عملی طراحی‌های مهندسی شده است. نرم‌افزارهای کامپیوتری باقابلیت تحلیل به روش اجزای محدود مجهز شده‌اند و مهندسان طراح به‌طور گسترده از روش اجزای محدود در مراحل طراحی خود استفاده می‌کنند.

هرچند اخیراً بیشتر نرم‌افزارهای تحلیلی مورد استفاده مهندسان به روش تحلیل خطی بودند، تحلیل خطی تقریب قابل قبولی از ویژگی‌ها و رفتار حقیقی بیشتر مسائل مهندسی ارائه می‌دهد ولی در برخی موارد که باعث رفتار غیرخطی می‌گردند، چالش‌های بزرگی به وجود می‌آید.

از نظر تاریخی مهندسان به علت وجود فرمول‌های پیچیده و زمان طولانی حل مسائل غیرخطی به استفاده از روش‌های تحلیل غیرخطی تمایلی نشان نمی‌دادند، اما امروزه به علت وجود نرم‌افزارهای باقابلیت تحلیل غیرخطی به روش اجزای محدود با محیط کاربری آسان این رویکرد دچار تحول شده است. بعلاوه روش‌های توسعه‌یافته حل مسائل و کامپیوترهای قدرتمند زمان حل مسائل را بسیار کاهش داده است. در یک دهه گذشته مهندسان روش اجزای محدود را به‌عنوان یک روش طراحی بارز و دور از دسترس قلمداد می‌کردند. امروزه مهندسان طراح به فواید تحلیل غیرخطی به روش اجزای محدود و استفاده از آن در مراحل طراحی آگاهی کامل دارند.

## تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی

واژه سختی، اصلی‌ترین تفاوت بین تحلیل خطی و غیرخطی را تعریف می‌کند. سختی یکی از مشخصه‌های عضو یا سازه است که رفتار آن را نسبت به بارهای وارده مشخص می‌کند. مواردی که بر روی سختی اثر گذارند شامل:

۱- شکل یک تیر ۱ شکل سختی متفاوتی از یک تیر ۲ شکل دارد.



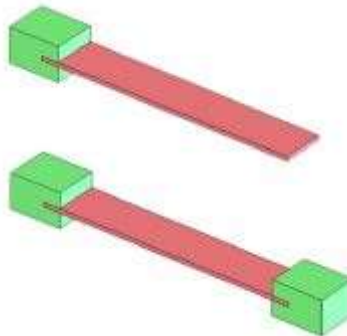
شکل ۱: اشکال مختلف مقاطع

۲- جنس: یک تیر آلومینیومی سختی کمتری از یک تیر فولادی هم اندازه خود دارد.



شکل ۲: جنس‌های مختلف مواد

۳- تکیه‌گاه: یک تیر با تکیه‌گاه در یک انتهای خود سختی کمتر و تغییر شکل بیشتری نسبت به تیری با همان اندازه و جنس ولی با دو تکیه‌گاه در انتها دارد.



شکل ۳: شرایط تکیه‌گاهی متفاوت

هنگامی که یک سازه در برابر بار وارده تغییر شکل می‌دهد به علت یک یا چند عامل معرفی شده در بالا سختی آن تغییر می‌کند. به‌عنوان مثال اگر تغییر شکل خیلی زیاد باشد عامل شکل می‌تواند تغییر کند و اگر مقاومت مواد به حد نهایی خود برسند، عامل خواص مواد تغییر خواهد کرد.

از طرف دیگر اگر تغییر در سختی به‌اندازه قابل توجهی کم باشد، این امکان وجود دارد که بتوان فرض کرد که شکل و جنس در طول مراحل تغییر مکان ثابت بمانند. این فرض مهم‌ترین اصل در تحلیل خطی است.

بدین معنی که در تمام مراحل تغییر شکل، مدل آنالیز شده دارای همان سختی است که مدل اولیه پیش از اعمال بار داشت. در تحلیل خطی صرف‌نظر از اینکه مدل چه مقدار تغییر شکل داشته باشد، یا اینکه بار به‌صورت مرحله‌ای یا ناگهانی اعمال گردد و یا اینکه تنش بسیار زیادی به علت بار وارده در اعضای سازه به وجود آید، مدل همواره سختی اولیه خود را در طول مراحل تحلیل حفظ خواهد کرد. این فرض به مقدار بسیار زیادی فرمول‌ها و حل مسائل مربوطه را ساده می‌کند.

اساسی‌ترین معادله تحلیل به روش اجزای محدود را در نظر بگیرید:

$$[F] = [K] \times [d]$$

که در آن [F] بردار معلوم نیروها در نقاط، [K] ماتریس معلوم سختی و [d] بردار مجهول تغییر مکان نقاط می‌باشند.

این معادله ماتریسی رفتار مدل در تحلیل به روش اجزای محدود را شرح می‌دهد. این رابطه شامل تعداد زیادی معادله جبری خطی است و به نسبت ابعاد مدل ممکن است از چند هزار تا چند میلیون متغیر داشته باشد. ماتریس سختی [K] به شکل هندسی مدل، خواص فیزیکی مواد تشکیل‌دهنده مدل و مهارها و تکیه‌گاه‌های آن بستگی دارد. برای تحلیل خطی فرض می‌گردد که سختی مدل هرگز تغییر نمی‌کند، سپس این معادله‌ها با فرض ثابت بودن ماتریس سختی تشکیل داده می‌شوند و در حالی که مدل تغییر شکل می‌دهد، بدون نیاز به بروز رسانی و تغییر هیچ پارامتری تنها یک بار حل می‌گردند؛ بنابراین تحلیل خطی مسیری مستقیم از فرمول‌های مسئله و حل آن‌ها را دنبال می‌کند. این امر باعث می‌گردد که حل معادلات و رسیدن به جواب حتی برای مدل‌های خیلی بزرگ چند ثانیه و یا چند دقیقه طول بکشد.

ولی به محض ورود به دنیای تحلیل غیرخطی همه چیز فرق می‌کند، زیرا تحلیل غیرخطی اجازه فرض سختی ثابت در طول مراحل تغییر شکل را به مهندس نمی‌دهد. در عوض سختی در طی مراحل تغییر شکل، تغییر می‌کند و ماتریس سختی [K] باید در هنگام مراحل حل مسائل پویا باشد و تغییر کند. این تکرار باعث افزایش زمان تحلیل و دستیابی به نتایج حقیقی تحلیل مدل می‌گردد.

### انواع مختلف تحلیل غیرخطی

هرچند مراحل تغییر سختی امری متداول در تمامی انواع تحلیل غیرخطی است، منشأ رفتار غیرخطی می‌تواند متفاوت باشد. این امر باعث می‌گردد که تحلیل غیرخطی بر اساس منشأ رفتار غیرخطی طبقه‌بندی گردد؛ بنابراین نمی‌توانیم یک نوع رفتار غیرخطی را برای تمامی مسائل در نظر بگیریم و بر اساس نوع مدل ممکن است چند رفتار غیرخطی به‌طور هم‌زمان در مدل بروز کند.

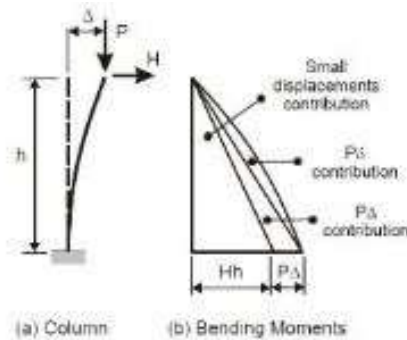
### غیرخطی هندسی

همان‌گونه که شرح داده شد، هنگامی که سختی مدل بر اساس عوامل خارجی تغییر می‌کند، تحلیل غیرخطی ضروری است. اگر تغییر در سختی به علت تغییر در شکل مدل باشد، رفتار غیرخطی به‌عنوان غیرخطی هندسی تعریف می‌گردد.

در برخی از نرم‌افزارهای تحلیلی به روش اجزای محدود، تحلیل‌هایی با عنوان تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ نیز به‌عنوان تحلیل غیرخطی هندسی نامیده می‌شوند ولی باید توجه کرد که این نوع تحلیل ضرورت استفاده از تحلیل غیرخطی برای تغییر شکل‌های کوچک را در نظر نمی‌گیرد. یکی از روش‌هایی که برای تحلیل غیرخطی هندسی در سازه‌ها می‌توان استفاده کرد، در نظر گرفتن اثر P- $\Delta$  است.

### اثر P- $\Delta$

اثر P- $\Delta$  که به‌عنوان «غیرخطی هندسی» نیز شناخته می‌شود به علت اعمال با در حالت تغییر شکل یافته یک سیستم سازه‌ای و تغییر در معادله تعادل سازه به وجود می‌آید. به‌طور خاص می‌توان گفت که P- $\Delta$  به علت وجود بارهای ثقلی در سازه‌های چند طبقه‌ای که تغییر مکان جانبی یافته‌اند ایجاد می‌شود. این شرایط باعث افزایش تغییر مکان جانبی طبقات می‌گردد.

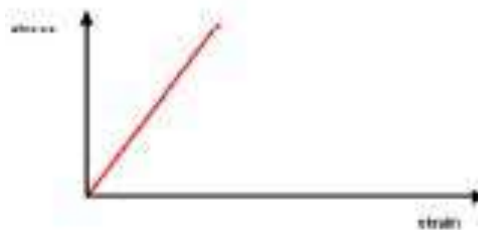


شکل ۴: اثر P- $\Delta$  در ستون

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌کنید، اثر P- $\Delta$  شامل بار بزرگ خارجی بر روی تغییر مکان‌های کوچک است. اگر تغییر شکل‌ها بسیار بزرگ گردند که موجب برهم خوردن روابط خطی گردند، آنالیز تغییر مکان‌های بزرگ ضروری می‌گردد. در تئوری خطی فرض می‌شود که تغییر مکان‌ها کوچک هستند و کل بار وارده در یک مرحله برای تحلیل اعمال می‌گردد. روش تغییر شکل‌های بزرگ هنگامی که تغییر شکل ایجاد شده باعث تغییر چشمگیر در سختی سازه گردند و در توانایی سازه برای تحمل بارها تغییر ایجاد کنند مورد نیاز است. در حل به روش تغییر شکل‌های کوچک فرض می‌گردد که سختی در طول اعمال بار تغییر نمی‌کند ولی در تغییر شکل‌های بزرگ فرض می‌گردد که سختی در طول اعمال بار تغییر می‌کند، بنابراین بارها به تدریج در مراحل مختلف اعمال می‌گردند و سختی برای هر مرحله از مراحل تحلیل به‌روزرسانی می‌گردد.

#### مواد غیر خطی

اگر تغییر در سختی به علت تغییر در خواص مواد تحت شرایط بارگذاری خارجی رخ دهد، تحلیل غیرخطی مواد مطرح می‌گردد. مطابق شکل ۵ در تحلیل خطی فرض می‌گردد که رابطه تنش و کرنش مواد خطی است و تنش متناسب با کرنش تغییر می‌کند.



شکل ۵: منحنی تنش کرنش خطی

این بدان معنی است که فرض شده است اگر بار زیادی وارد گردد تنش زیاد و تغییر شکل زیادی رخ خواهد داد و این تغییرات متناسب با نیروی اعمال شده است. همچنین فرض می‌کند که هیچ تغییر شکل دائمی رخ نخواهد داد و به محض برداشتن بار اعمال شده مدل همیشه به شکل اولیه خود باز خواهد گشت.

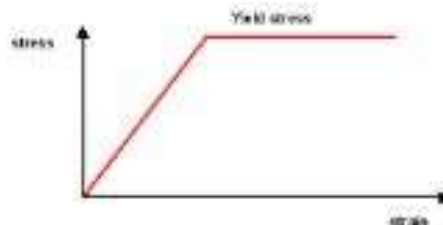
هرچند این فرضیه مورد قبول است، ولی اگر بارهای وارده آن قدر بزرگ باشند که تغییر شکل دائمی ایجاد کنند (مانند حالتی که در اکثر مواد پلاستیک اتفاق می‌افتد) و یا هنگامی که کرنش ایجاد شده خیلی زیاد شود (همان‌گونه که در لاستیک و مواد کشسان رخ می‌دهد)، مدل غیرخطی مواد باید در نظر گرفته شود.

مواد مختلف رفتار متفاوتی را در ناحیه غیرخطی از خود نشان می‌دهند. تکنیک‌های تحلیل به روش اجزای محدود متفاوتی نیز برای در نظر گرفتن حالت غیرخطی مواد و شبیه‌سازی رفتار آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در جدول ۱ مناسب‌ترین تکنیک‌های تحلیل غیرخطی برای مواد الاستوپلاستیک که عمده‌ترین مواد سازه‌ای می‌باشند پیشنهاد شده است:

نوع مدل پیشنهادی	موارد استفاده
Von Mises یا Tresca	این مدل برای مواردی مناسب است که منحنی تنش-کرنش پیش از رسیدن به تنش نهایی، ناحیه‌ای بدون تغییر و یا با تغییرات کوچک را نشان دهد. بیشتر مواد مهندسی با این روش خصوصاً نشان قابل تعریف است.
Drucker-Prager	این مدل برای خاک و مواد دانه‌ای مناسب است.

جدول ۱: تکنیک‌های تحلیل غیرخطی برای مواد الاستوپلاستیک

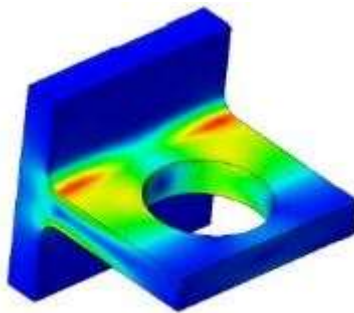
شکل ۶ منحنی تنش-کرنش برای مواد الاستوپلاستیک (الاستیک-کاملاً پلاستیک) را نشان می‌دهد. بر اساس این نوع مدل برای مواد، مقدار تنش حداکثر، از محدودیت تنش پلاستیک (تنش تسلیم) نمی‌تواند تجاوز کند.



شکل ۶: منحنی تنش کرنش مواد الاستیک-کاملاً پلاستیک

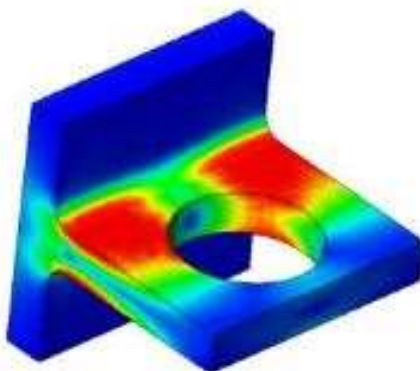
در تحلیل مواد الاستیک-کاملاً پلاستیک باید توجه کرد که این مواد پس از ورود به محدوده پلاستیک توانایی بازگشت به شکل اولیه را ندارند و در مقادیر کرنش بالاتر از کرنشی مشخص، تنش ثابت باقی می‌ماند.

شکل ۷ یک براکت آلومینیومی را نشان می‌دهد. بیشترین تنش موجود در تحلیل خطی براکت ۴۴ مگا پاسکال می‌گردد و این حقیقت که آلومینیوم در ۲۸ مگا پاسکال جاری می‌شود را نادیده گرفته است.



شکل ۷: تحلیل خطی براکت آلومینیومی سوراخ‌دار تنشی بیش از محدوده تنش تسلیم مواد تشکیل‌دهنده آن را نشان می‌دهد

تحلیل غیرخطی می‌تواند نشان دهد که اگر تنش موجود بیش از ۲۸ مگا پاسکال شد، مواد وارد محدوده تنش تسلیم می‌شوند. همان‌گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، تحلیل غیرخطی نشان می‌دهد که براکت به خرابی بسیار نزدیک است. محدوده پلاستیک تقریباً تمام مقطع قسمت طره را فرا گرفته است و اندکی افزایش در مقدار بار وارده باعث می‌گردد که مقطع کاملاً پلاستیک شود و باعث تشکیل مفصل پلاستیک گردد که باعث متلاشی شدن براکت می‌گردد.



شکل ۸: تحلیل غیرخطی تنشی بیش از تنش تسلیم را در براکت نشان نمی‌دهد. گستردگی ناحیه پلاستیک نشان می‌دهد که ایجاد مفصل پلاستیک در براکت بسیار نزدیک است. نیروی وارده در مرز ظرفیت باربری براکت است

البته قضاوت مهندسی برای اینکه تصمیم گرفته شود که طرح صورت گرفته موردقبول است یا خیر ضروری است.

### کمانش

سختی در اعضا به علت بار وارده نیز تغییر می‌کند. بعضی وقت‌ها، نیروها بسته به اینکه چگونه اعمال می‌شوند می‌توانند باعث افزایش سختی (نیروهای کششی) و یا کاهش آن (بارهای فشاری) گردند. به‌عنوان مثال، یک طناب کشیده شده می‌تواند وزن یک آکروبات باز را تحمل کند، در حالی که شل شدن طناب باعث افتادن او می‌گردد. در مورد نیروهای فشاری، اگر تغییر در سختی آن قدر کافی باشد که باعث رسیدن سختی سازه به صفر گردد، کمانش رخ خواهد داد و سازه دچار تغییر شکل سریع می‌گردد. این کمانش ممکن است باعث سقوط سازه گردد و یا ایجاد سختی جدید در مرحله پس از کمانش نماید.

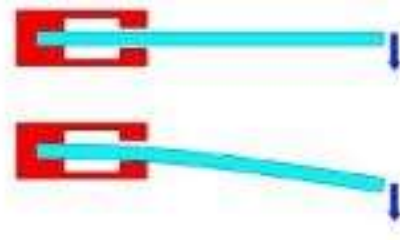
تحلیل خطی کمانش می‌تواند برای محاسبه نیرویی که بر اثر آن سازه دچار کمانش می‌گردد استفاده شود (بار اویلر). با این حال نتیجه حاصل از تحلیل خطی کمانش همیشه دقیق نیست. به‌علاوه ایده آل سازی سازه‌ها در تحلیل به روش اجزای محدود

ممکن است باعث شود که نتایج پیش‌بینی شده برای بار کمانش بسیار بیشتر از مقداری گردد که در سازه واقعی رخ می‌دهد. بنابراین نتایج حاصل از تحلیل خطی کمانش باید محتاطانه استفاده گردند.

کمانش لزوماً معادل خرابی شدید در سازه نیست و ممکن است سازه پس از وقوع کمانش نیز قادر به تحمل بار باشد. تحلیل غیرخطی می‌تواند رفتار پس از کمانش را شرح دهد.

### تکیه‌گاه غیرخطی

اگر شرایط تکیه‌گاه در طول اعمال بار تغییر کند، تحلیل غیرخطی برای تکیه‌گاه‌ها مورد نیاز است. شکل ۹ مثالی از تکیه‌گاه غیرخطی است. طول مؤثر تیر و سختی حاصله بستگی به مقدار تغییر شکل تیر دارد. هنگامی که تیر با تکیه‌گاه تماس پیدا می‌کند، به علت کاهش طول مؤثر تیر، سختی افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۹: این تکیه‌گاه هنگامی که فعال گردد باعث تغییر طول مؤثر تیر می‌گردد. در نتیجه سختی تیر تغییر می‌کند و حل آن نیاز به تحلیل غیرخطی دارد.

### تحلیل دینامیکی غیرخطی

تحلیل دینامیکی هنگام وجود اثرات اینرسی، میرایی و نیروهای وابسته به زمان مورد نیاز است. آزمایش سقوط، لرزش یک موتور، برخوردها و زلزله همگی نیاز به تحلیل دینامیکی دارند.

ولی تحلیل دینامیکی خطی است یا غیرخطی؟ قوانین موجود دقیقاً همانند قوانین موجود در تحلیل استاتیکی می‌باشند.

اگر سختی مدل بر اثر بارهای وارده تغییر چندانی نداشته باشد، تحلیل دینامیکی خطی کفایت می‌کند. ولی در مسائلی که تغییر مکان‌های بزرگ (هندسه غیرخطی) و یا کرنش‌های بزرگ (مواد غیرخطی) رخ می‌دهد به تحلیل دینامیکی غیرخطی نیاز است.

### دلایل استفاده از تحلیل غیرخطی

طبیعت غیرخطی است این به این معنی است که تحلیل خطی تنها می‌تواند رفتار واقعی غیرخطی سازه‌ها را تخمین بزند. گاهی چنین تخمین‌هایی می‌تواند مورد قبول باشد و از تحلیل خطی دیدی مناسب نسبت به مشخصات و رفتار سازه به دست آورد. ولی در بیشتر موارد فرضیات خطی تفاوت بسیار زیادی با واقعیت دارند و اطلاعات غلطی به ما می‌دهند.

استفاده از نتایج تحلیل خطی برای تصمیم‌گیری اینکه آیا یک عضو بر اثر بار وارده دچار خرابی می‌گردد یا خیر ممکن است موجب طرحی غیراقتصادی گردد. به‌عنوان مثال، در طراحی یک بَرَاکت که به روش خطی تحلیل شده است، طراح باید به این نکته توجه کند که تنش موجود نباید از تنش تسلیم تجاوز کند ولی تحلیل غیرخطی ممکن است نشان دهد که بعضی از

تنش‌های تسلیم می‌توانند موجب خرابی نگردند و موردقبول باشند. در این‌گونه موارد می‌توان در ابعاد صرفه‌جویی کرد و هزینه‌ها را کاهش داد، بدون اینکه مجبور باشیم درستی عملکرد سازه را به خطر اندازیم.

### نتیجه‌گیری

رفتار غیرخطی در سازه‌ها می‌تواند به علت تغییر در رفتار هندسه سازه و یا رفتار مواد سازه به وجود آید. سختی اصلی‌ترین تفاوت بین تحلیل خطی و غیرخطی را تعریف می‌کند. سختی یکی از ویژگی‌ها عضو یا سازه است که رفتار آن عضو و یا سازه را نسبت به بارهای اعمال شده نشان می‌دهد. سه عامل اصلی روی سختی تأثیر گذارند: شکل، جنس و شرایط تکیه‌گاهی.

نویسنده: کامیار باقری نژاد

منبع:

<https://ksoft.ir/%d8%aa%d9%81%d8%a7%d9%88%d8%aa-%d8%aa%d8%ad%d9%84%db%8c%d9%84-%d8%ae%d8%b7%db%8c-%d9%88-%d8%ba%db%8c%d8%b1-%d8%ae%d8%b7%db%8c/>