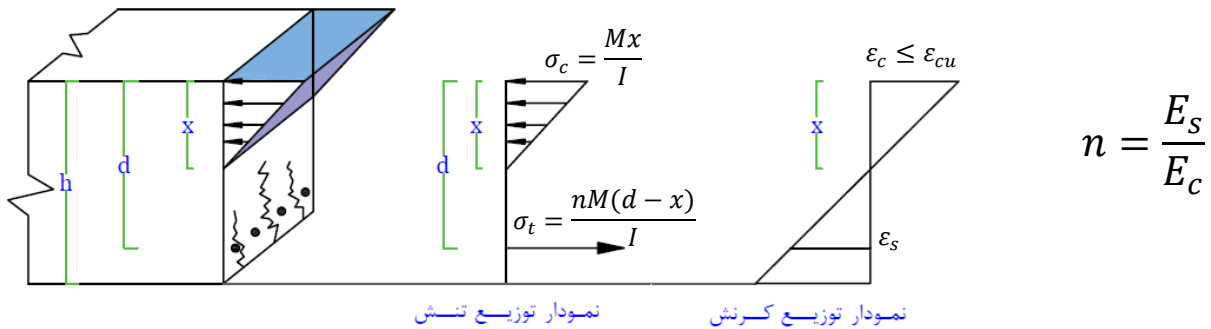
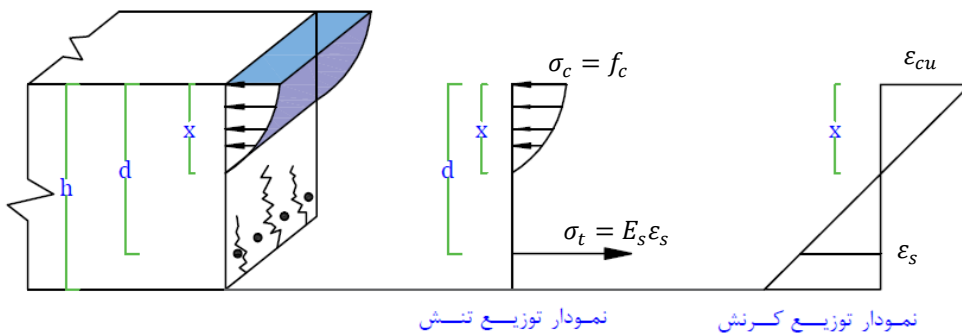


۱-۱-۱ لنگر خمشی مقاوم حدی نهایی (ظرفیت مقطع)

با افزایش بارگسترده q لنگر خمشی M در مقطع A-A شکل ۳-۵ افزایش می‌یابد. در پی این افزایش لنگر تنش‌های کششی و فشاری وارد بر نواحی کششی و فشاری مقطع افزایش می‌یابد. پس از اینکه لنگر وارد بر مقطع بیشتر از لنگر ترک‌خوردگی مقطع بتن‌آرمه شد، بتن ناحیه کششی هیچگونه مقاومتی در برابر تنش کششی وارده نخواهد داشت و تمام تنش کششی ناشی از لنگ مثبت وارده توسط آرماتورهای کششی تحمل می‌شود. اما در قسمت فشاری مقطع بتن‌آرمه چه خبر است؟ در این قسمت پس از اینکه بتن کششی از مدار باربری خارج می‌شود، همچنان رفتار بتن خطی است. با افزایش بیشتر بارگسترده و به تبع آن لنگر خمشی، تنش فشاری وارد بر ناحیه مقطع بتن‌آرمه بیشتر شده تاجایی که تنش وارد بر دورترین تار فشاری به مقدار مقاومت فشاری مشخصه بتن برسد. در این زمان توزیع تنش در ناحیه فشاری مقطع بتن‌آرمه به صورت غیرخطی می‌باشد. شکل ۳-۹ و ۳-۱۰ روند مراحل گفته شده را با جزئیات شرح می‌دهند.



شکل ۳-۹ توزیع تنش و کرنش در حالت الاستوپلاستیک



شکل ۳-۱۰ توزیع تنش و کرنش در حالت حدی نهایی

در هر مرحله از افزایش لنگر روی مقطع نیروهای فشاری و کششی به مقطع بتن آرمه وارد می‌شوند. مقدار نیروی مقاوم مقطع بتن آرمه در برابر هر کدام از این نیروهای وارده برابر حجم توزیع تنش در نواحی مربوطه می‌باشد. به عنوان مثال نیروی فشاری مقاوم در حالت الاستوپلاستیک شکل ۳-۹ برابر است با $b \times \frac{x \times \sigma_c}{3}$ (عرض مقطع) و نیروی کششی مقاوم در این حالت برابر است با $\sigma_t \times A_s$ (مساحت آرماتورهای کششی). مبنای محاسبه ظرفیت خمشی حدی نهایی یک تیر بتن آرمه شکل ۱۰-۳ می‌باشد. جایی که تنش در بالاترین تار فشاری برابر مقاومت فشاری مشخصه، (f_c) و کرنش در دورترین تار فشاری برابر کرنش نهایی بتن (ϵ_{cu}) می‌باشد.

در این مرحله نیروی فشاری و کششی مقاوم مقطع به چه صورتی محاسبه می‌شود؟

مسئله نیروی کششی مقاوم از ضرب تنش کششی آرماتورهای کششی در مساحت آرماتورهای کششی محاسبه می‌شود. $(E_s \epsilon_s A_s)$ برای محاسبه نیروی مقاوم فشاری لازم است تا حجم ناحیه غیرمنشوری در شکل ۳-۱۰ محاسبه شود.

$$F_c = \int_0^x F(x) dx \quad \text{رابطه ۳-۷}$$

محاسبه انتگرال فوق نیاز به داشتن رابطه توزیع تنش فشاری در نمودار تنش و کرنش می‌باشد. لذا فرایندی دشوار و زمانبر می‌باشد. آقای سی.اس. ویتنی^۱ روش ساده‌تری را جهت محاسبه نیروی مقاوم فشاری ارائه نموده‌اند. ایشان با در نظر گرفتن مستطیل هم حجم با ناحیه فشاری و توزیع یکوناخت تنش، الزام انتگرال گیری جهت محاسبه نیروی فشاری مقاوم را از بین برده‌اند. مستطیل معادل ویتنی دارای عرض βx ، ارتفاع αf_c و طول b می‌باشد. نیروی فشاری مقاوم در حالت حد نهایی به روش ویتنی برابر است با:

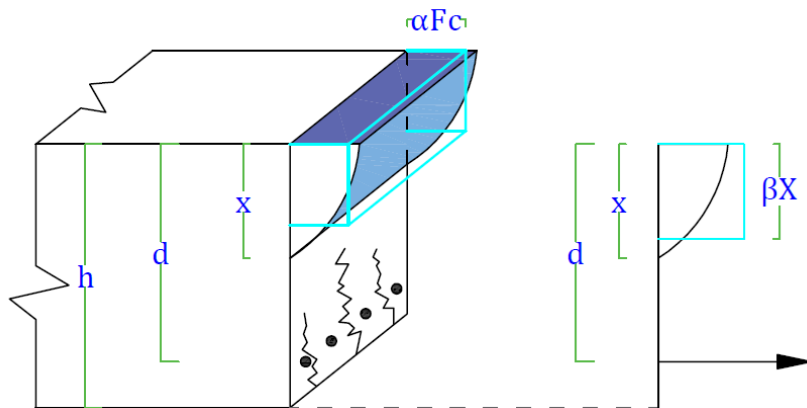
$$F_c = \alpha f_c \beta x b \quad \text{رابطه ۳-۸}$$

این مقدار با نیروی حاصل از انتگرال فوق برابر می‌باشد.

طبق بند ۹-۱۴-۳-۶

$$\beta = 0.97 - 0.0025 f_c \quad \text{رابطه ۳-۹}$$

$$\alpha = 0.85 - 0.0015 f_c \quad \text{رابطه ۳-۱۰}$$



بلوک تنش مستطیلی سی.اس.ویتنی

شکل ۱۰-۳ توزیع یکنواخت

تنش به روش C. S.

Whitney

در جدول ۱-۳ مقدار کرنش در حد نهایی بتن برای رده‌های مختلف مقاومتی ارائه شده است.

جدول ۱-۳ مقدار کرنش نهایی بتن برای رده‌های مختلف مقاومتی

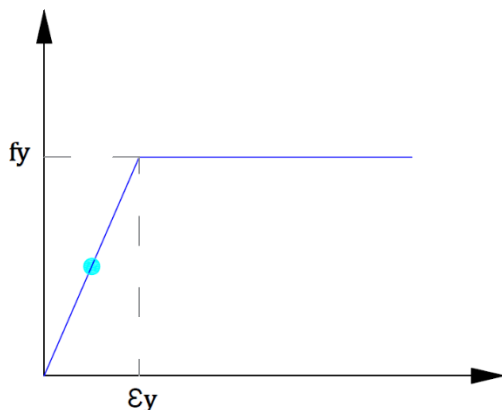
رده بتن	C۱۲ تا C۵۰	C۵۵	C۶۰	C۷۰	C۸۰	C۹۰	C۱۰۰
ϵ_{cu}	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۳	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۸

همانطور که در فصل دوم گفته شد برای محاسبه ظرفیت یک مقطع بتن آرمه در لحظه حدی نهایی از یک سری ضرایب اطمینان استفاده می‌شود. با این توصیف نیروی فشاری و کششی مقاوم یک تیر بتن آرمه تک آرمه تحت یک لنگر خمشی برابر است با:

$$F_c = \varphi_c \alpha f_c \beta x b \quad \text{رابطه ۱۱-۳}$$

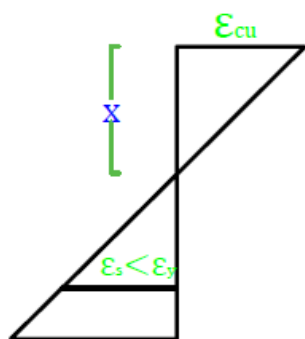
$$F_t = \varphi_s E_s \epsilon_s A_s \quad \text{رابطه ۱۲-۳}$$

حد نهایی در محاسبه ظرفیت تیر بتن آرمه جایی است که کرنش در بالاترین تار فشاری به مقدار کرنش نهایی بتن ϵ_{cu} می‌رسد. در این لحظه با توجه به نمودار ایده‌آل شده تنش کرنش فولاد سه حالت می‌تواند رخ دهد.



۱- فولاد کششی در لحظه نهایی جاری نشده باشد (شکست ترد): در این لحظه تنش مقاوم کششی مقطع بتن آرمه برابر است با ضرب کرنش فولاد در مدول گسیختگی فولاد. لازم به ذکر است طراحی یک تیر بتن آرمه باید به گونه‌ای باشد که شکست ترد رخ ندهد.

$$F_t = \varphi_s E_s \varepsilon_s A_s \quad \text{رابطه ۳-۱۳}$$

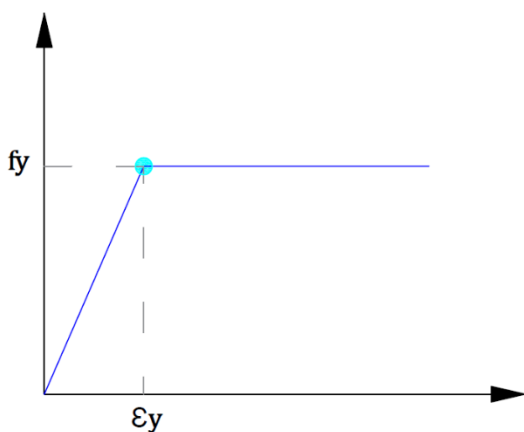


جهت محاسبه عمق تار فشاری در این حالت باید از تعادل بین نیروهای کششی و فشاری استفاده شود.

$$F_t = F_c \rightarrow \varphi_s E_s \varepsilon_s A_s = \varphi_c \alpha f_c \beta x b$$

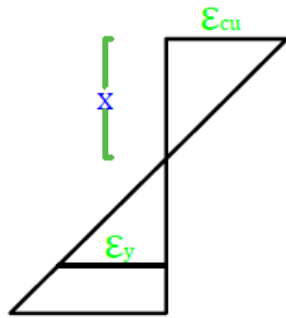
$$x = \frac{\varphi_s E_s \varepsilon_s A_s}{\varphi_c \alpha f_c \beta b}$$

نمودار توزیع کرنش در حالت شکست ترد



۲- فولاد کششی در لحظه نهایی در حد جاری شدن خود باشد. به این حالت، حالت بالانس گفته می‌شود. در حالت بالانس در لحظه نهایی کرنش در دورترین تار فشاری برابر ε_{cu} و کرنش در آرماتورهای کششی برابر ε_y می‌باشد. لذا عمق تار خنثی با تشابه هندسی محاسبه می‌شود.

$$F_t = \varphi_s f_y A_s \quad \text{رابطه ۳-۱۴}$$



نمودار توزیع کرنش در حالت بالانس

جهت محاسبه عمق تار فشاری در این حالت هم می‌توان از تشابه مثلث های توزیع کرنش استفاده کرد و هم از تعادل بین نیروی کششی و فشاری:

$$F_t = F_c \rightarrow \varphi_s f_y A_s = \varphi_c \alpha f_c \beta x b$$

$$x_b = \frac{\varphi_s f_y A_s}{\varphi_c \alpha f_c \beta b}$$

$$x_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} d \quad \text{رابطه ۱۵-۳}$$

با ضرب کردن صورت و مخرج رابطه ۱۵-۳ به رابطه ساده شده ۱۶-۳ جهت محاسبه عمق تار فشاری در حالت

بالانس خواهیم رسید:

$$x_b = \frac{\varepsilon_{cu} \times E_s}{E_s \times \varepsilon_{cu} + E_s \times \varepsilon_y} d = \frac{700}{700 + f_y} d \quad \text{رابطه ۱۶-۳}$$



نکته ۱: کرنش جاری شدن آرماتور فشاری برابر است با:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$

نکته ۲: مساحت آرماتور بالانس از رابطه :

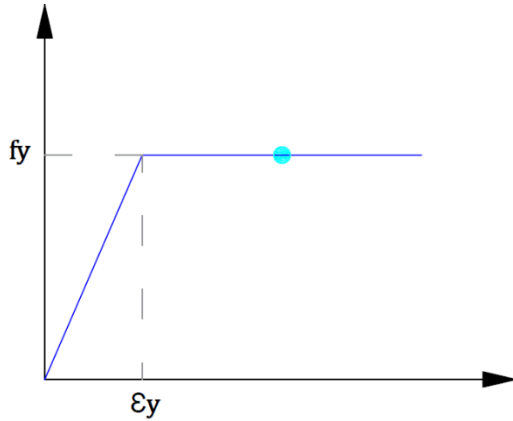
$$A_{sb} = \alpha \beta \frac{\varphi_c f_c}{\varphi_s f_f} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} b d$$

$$A_{sb} = \alpha \beta \frac{\varphi_c f_c}{\varphi_s f_f} \frac{700}{700 + f_y} b d$$

۴- فولاد در لحظه نهایی از حد جاری شدن خود عبور کرده باشد و اصطلاحاً جاری شده باشد. شکست تیر بتن آرمه

در این حالت به شکست نرم معروف بوده و طراحی مجاز برای تیرهای بتن آرمه باید به گونه‌ای باشد که شکست تیر از نوع

نرم باشد.

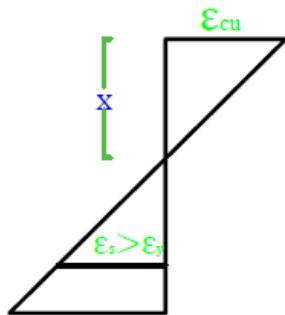


$$F_t = \varphi_s f_y A_s \quad \text{رابطه ۳-۱۷}$$

جهت محاسبه عمق تار فشاری در این حالت باید از تعادل بین نیروهای کششی و فشاری استفاده شود.

$$F_t = F_c \rightarrow \varphi_s f_y A_s = \varphi_c \alpha f_c \beta x b$$

$$x = \frac{\varphi_s f_y A_s}{\varphi_c \alpha f_c \beta b}$$



نمودار توزیع کرنش در حالت شکست نرم

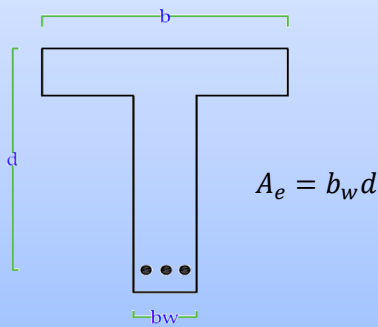
مقدار آرماتور لازم در هر حالت از معادله تعادل در مقطع بتن آرمه محاسبه می‌شود.

پارامتر نسبت فولاد یا درصد فولاد از تقسیم مساحت به دست آمده برای فولاد کششی به مساحت موثر مقطع به دست می‌آید. (مساحت موثر مقطع برابر حاصل ضرب عرض b مقطع در فاصله مرکز آرماتورها تا دورترین تار فشاری d می‌باشد).

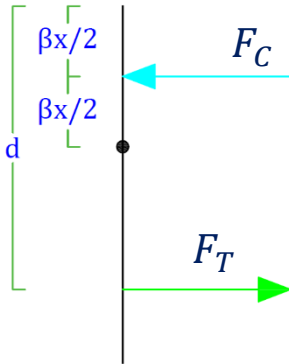


نکته: اگر یک مقطع به صورت ترکیبی از چند مقطع منشوری باشد، عرض موثر مقطع برابر عرضی از مقطع

است که در کل ارتفاع مقطع ادامه پیدا کرده است.



نمودار توزیع نیرو در مقطع بتن آرمه را در نظر بگیرید. همانطور که قبلاً گفته شد نیروی مقاوم فشاری و کششی با یکدیگر برابرند. با محاسبه لنگر نیروی های مقاوم حول یک نقطه از مقطع، لنگر مقاوم مقطع محاسبه می‌شود. با فرض محاسبه لنگر نیرو های مقاوم حول نقطه مشخص شده بر روی نمودار توزیع نیرو خواهیم داشت:



$$M_r = F_C \times \frac{\beta x}{\gamma} + F_T \times (d - \beta x) \quad \text{رابطه ۱۸-۳}$$

از طرفی چون مقدار $F_C = F_T$ می‌باشد لذا داریم:

$$M_r = F_T \times \left(d - \frac{\beta x}{\gamma}\right) = F_C \times \left(d - \frac{\beta x}{\gamma}\right) \quad \text{رابطه ۱۹-۳}$$

با توجه به اینکه نیروی مقاوم فشاری و کششی با یکدیگر برابرند، با یکدیگر تشکیل کوپل داده و رابطه ۱۹-۳ لنگر ناشی از این کوپل‌ها است. (نیرو \times بازو = لنگر کوپل) پس از اینکه لنگر مقاوم تیر بتن آرمه محاسبه شد، براساس طراحی به روش حد نهایی خواهیم داشت.

$$M_u \leq M_r$$

مثال ۵

نسبت فاصله محور خنثی تا دورترین تار فشاری یک مقطع مستطیل شکل بتنی با آرماتور کششی تنها و با بتن C۳۰ و فولاد S۴۰۰ در حالت (بالانس)، به فاصله مذکور همان مقطع ولی با بتن C۷۰، به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک تر است؟ (حالت متعادل حالتی است که در آن به طور همزمان کرنش در بتن به مقدار حداکثر خود و کرنش میلگردهای کششی به کرنش نظیر تسلیم آنها برسد.)

(د) ۱/۱

(ج) ۰/۹

(ب) ۱/۰

(الف) ۱/۲

محاسبات ۹۵

حل: ✨

ارتفاع تار خنثی در حالت بالانس از رابطه ۱۵-۳ محاسبه می‌شود.

$$x_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} d$$

$$C30 \Rightarrow \varepsilon_{cu} = 0.0035 \Rightarrow \text{جدول (۱-۳)}$$

$$C70 \Rightarrow \varepsilon_{cu} = 0.0028 \Rightarrow \text{جدول (۱-۳)}$$

$$\varepsilon_y = 0.002$$

$$x_{bc30} = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.002} d = 0.64d$$

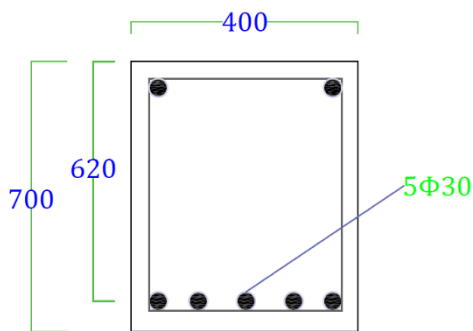
$$x_{bc70} = \frac{0.0028}{0.0028 + 0.002} d = 0.58d$$

$$\frac{x_{bc30}}{x_{bc70}} = \frac{0.64d}{0.58d} = 1.1$$

بنابراین گزینه **د** صحیح می باشد.

مثال ۶

با فرض خطی بودن توزیع کرنش در ارتفاع مقطع تیر با شکل مقابل، کرنش فولاد تحت لنگر خمشی مقاوم مقطع به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک تر است؟ بتن از رده C70 و رده فولاد میلگردها S400 و $E_s = 200\text{Gpa}$ می باشد. در محاسبات از آرماتور فشاری صرف نظر گردد. (ابعاد به میلی متر و پنج میلگرد پایین تحت کشش هستند).



(الف) 0.152

(ب) 0.028

(ج) 0.020

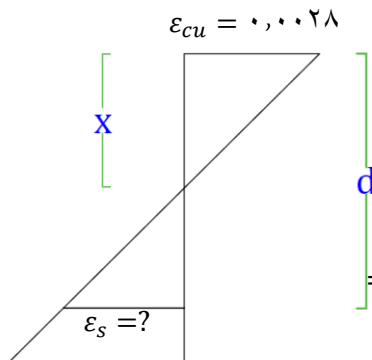
(د) 0.128

محاسبات ۹۴

حل: ✨

با توجه به اینکه توزیع کرنش خطی بوده و کرنش نهایی در دورترین تار فشاری برابر کرنش نهایی بتن می باشد (کرنش نهایی بتن برای C70 برابر 0.0028 می باشد) می توانیم با استفاده از تشابه مثلثها مقدار کرنش در محل آرماتورهای

کششی را محاسبه نماییم. اما برای استفاده از تشابه مثلث ها و محاسبه کرنش در فولاد های کششی لازم است عمق تار فشاری مقطع از رابطه تعادل محاسبه شود.



$$F_C = F_T \Rightarrow \varphi_s A_s f_y = \varphi_c \alpha f_c \beta x b$$

$$\alpha = 0.185 - 0.0015 \times 70 = 0.1745$$

$$\beta = 0.97 - 0.0025 \times 70 = 0.1795$$

$$A_s = \frac{5 \pi d^2}{4} = \frac{5 \times \pi \times 30^2}{4} = 3534.3 \text{ mm}^2$$

$$\Rightarrow 0.185 \times 3534.3 \times 400 = 0.165 \times 0.1745 \times 70 \times 0.1795 \times x \times 400$$

$$x = 111.42 \text{ mm}$$

از تشابه مثلث ها داریم:

$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{620 - 111.42}{111.42} \times 0.0028 = 0.01278$$

علت اینکه در رابطه تعادل به جای تنش فولاد مقدار تنش جاری شدن (۴۰۰ مگاپاسکال) را قرار دادیم چیست؟

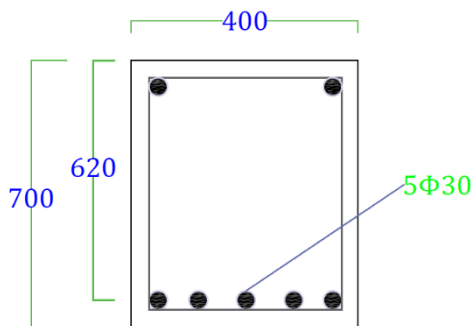
شکست از نوع ترد بوده یا نرم؟

بنابراین گزینه صحیح می باشد.

مثال ۷

لنگر مقاوم خمشی مقطع شکل زیر بدون در نظر گرفتن آرماتورهای بالانس برابر چند کیلونیوتن متر می باشد؟

(بتن مصرفی از رده C۷۰ و فولاد مصرفی نیز از رده S۴۰۰ می باشد.)



الف) ۴۳۲/۲۵

ب) ۵۷۲ /۲۷

ج) ۳۶۳/۳۶

د) ۶۷۸/۵۳

☆ حل:

مقطع این شکل دقیقا مقطع شکل قبل بوده و پارامترهایی که در سوال قبل محاسبه شده در این سوال استفاده می‌شود. جهت محاسبه لنگر مقاوم مقطع از رابطه ۳-۱۹ استفاده می‌شود، اما باید دقت شود که در رابطه به جای مقدار x باید مقدار آن در حالت بالانس قرار داده شود. همانطور که قبلا نیز گفته شد مقدار عمق تار فشاری در حالت بالانس را می‌توان از رابطه ۳-۱۵ محاسبه نمود.

$$M_r = F_T \times \left(d - \frac{\beta x}{\gamma} \right) = F_C \times \left(d - \frac{\beta x}{\gamma} \right)$$

$$x_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} d = \frac{0.0028}{0.0028 + 0.002} \times 620 = 361.66 \text{ mm}$$

$$M_r = F_T \times \left(d - \frac{\beta x}{\gamma} \right) = 0.185 \times 3534/3 \times 400 \left(620 - \frac{0.1795 \times 361.66}{2} \right) = 572279691/11 \text{ N.mm}$$
$$= 572/27 \text{ KN.m}$$

بنابراین گزینه **ب** صحیح می‌باشد.