

به نام آنکه
جان را حکمت آموخت

روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده

- **Disclaimer**
No responsibility is assumed by Publisher nor by the Proprietor for any injury and/or damage to persons or Property as a result of any actual or alleged libelous Statements, infringement of intellectual property or Privacy rights, or otherwise, or from any use or Operation of any ideas. Instructions, procedures, Products or methods contained in the material therein.

- **Copyright**
All Rights Reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning or otherwise , except under the terms of the Copyright, Designs and Patents Act 1988 or under th terms of a licence issued by the copyright Licensing Agency Ltd, 90 Tottenham Court Road, London W1T 4LP, UK, without the permission in writing of the Publisher. Requests to the Publisher should be addressed to the Permissions Department, John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England, or emailed to permreq@wiley.co.uk, or faxed to (+44)1243 770620.

- **Agreement**
This edition of Scaled Boundary Finite Element Method by John P.Wolf is published by arrangement with John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England.

- **Translation**
This translation was undertaken by Dr. Sassan Mohasseb, SMTEAM GmbH, CH-8706 Meilen, Switzerland.

ISBN 0 471 48682 5

روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده

تألیف:

John P. Wolf

ترجمه و تدوین:

ساسان محاسب

سرشناسه	: ولف، جان پی، ۱۹۳۸ - م Wolf, John P.
عنوان و نام پدیدآورنده	: روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده / تألیف: جان. پی. ولف؛ ترجمه و تدوین: ساسان محاسب.
مشخصات نشر	: تهران: تمثیل، ۱۳۹۱.
مشخصات ظاهری	:
شابک	:
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا.
یادداشت	: عنوان اصلی:
موضوع	:
موضوع	:
شناسه افزوده	: محاسب، ساسان، ۱۳۳۵ - ، مترجم.
رده‌بندی کنگره	:
رده‌بندی دیویدی	:
شماره کتاب‌شناسی ملی	:

ناشر: انتشارات تمثیل

روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده

John P. Wolf

ترجمه و تدوین: ساسان محاسب

ویراستار: آرش نیری

امور فنی و هنری: مهناز عزب‌دفتری

نوبت چاپ: اول، ۱۳۹۱

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

شابک:

قیمت: ۲۰۰۰۰ تومان

حق چاپ برای صاحب اثر محفوظ است.

آدرس انتشارات: تهران، میدان انقلاب، خیابان دانشگاه، خیابان وحید نظری، بین فخر رازی و دانشگاه، ساختمان ۶۱.

طبقه دوم، واحد ۲۴: — تلفن: ۶۶۹۶۱۵۹۶ - ۶۶۴۸۰۶۹۵

تقدیم بہ روح پاک پدرم
ہمراہ ہمیشگی ام در زندگی

فهرست مطالب

مقدمه مترجم.....	ش
پیشگفتار.....	ض
مقدمه مؤلف.....	ظ
۱ مبانی تحلیل عددی.....	۱
۱ - ۱ مسئله فیزیکی، مدل ریاضی و حل عددی آن.....	۲
۲ - ۱ معادله لاپلاس برای جابه‌جایی‌های عمود بر مقطع صفحه برشی.....	۳
۳ - ۱ روش باقیمانده‌های وزنی.....	۸
۴ - ۱ روش اجزای محدود.....	۱۴
۵ - ۱ روش اجزای مرزی.....	۳۲
۶ - ۱ نگاهی اجمالی به روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده.....	۵۱
۲ روش محاسباتی خلاقانه.....	۶۵
بخش اول مسئله مدل: جزء خطی برای معادله موج اسکالر	
۳ مفاهیم انتقال مرز مقیاس شده هندسه و تشابه.....	۷۵
۴ گوه کامل و گوه ناقص نیمه نامحدود ورق برشی.....	۸۱
۵ استنتاج بر پایه انتقال مرز مقیاس شده.....	۸۵
۱ - ۵ انتقال مرز مقیاس شده هندسه.....	۸۵
۲ - ۵ معادلات حاکم در مختصات مرز مقیاس شده.....	۹۰
۳ - ۵ روش باقیمانده‌های وزنی.....	۹۱
۴ - ۵ ماتریس سختی دینامیکی.....	۹۷
۶ استنتاج بر پایه اصول مکانیک.....	۱۰۳
۱ - ۶ ماتریس سختی دینامیکی در مرزهای مشابه.....	۱۰۶
۲ - ۶ ماتریس ضرایب.....	۱۰۸
۳ - ۶ سرهم‌بندی سلول جزء محدود و حوزه.....	۱۱۶
۴ - ۶ حد تحلیلی عرض سلول جزء محدود.....	۱۱۸
۷ مدل‌سازی اجزای محدود تک‌خطی.....	۱۲۷
۸ استاتیک.....	۱۴۱
۱ - ۸ بار حجمی صفر.....	۱۴۱
۲ - ۸ بار حجمی غیرصفر.....	۱۴۳

جرم گوه	۹	۱۴۷
بسط مجانب فرکانس بالا برای سختی دینامیکی گوه بریده شده نیمه بی نهایت	۱۰	۱۴۹
حل عددی سختی دینامیکی، پاسخ ضربه واحد و تغییر مکان گوه	۱۱	۱۵۳
۱ - ۱۱ سختی دینامیکی		۱۵۴
۲ - ۱۱ پاسخ ضربه واحد		۱۵۵
۱ - ۲ - ۱۱ تبدیل معکوس سری فوریه		۱۵۶
۲ - ۲ - ۱۱ جداسازی زمانی		۱۵۹
۳ - ۱۱ جابه جایی		۱۶۱
حل تحلیلی در حوزه فرکانس	۱۲	۱۶۵
۱ - ۱۲ جابه جایی		۱۶۶
۲ - ۱۲ سختی دینامیکی گوه		۱۷۲
۳ - ۱۲ سختی دینامیکی گوه بریده شده نیمه بی نهایت		۱۷۲
۴ - ۱۲ جابه جایی نقاط دور		۱۷۵
کاربرد	۱۳	۱۷۷
جمع بندی	۱۴	۱۸۱
۱ - ۱۴ استنتاج		۱۸۱
۲ - ۱۴ رویه حل مسئله		۱۸۲
۳ - ۱۴ ویژگی و مزایا		۱۸۴
پیوست الف مدل سازی جامدات		۱۸۷
پیوست ب حرکت هارمونیک و انتقال فوریه		۱۹۳
پیوست پ اندرکنش دینامیکی سازه - محیط بی کران		۲۰۳
پیوست ت تاریخچه		۲۱۱

بخش دوم الاستودینامیک، استاتیک و انتشار دوبعدی و سه بعدی

رابطه های بنیادی	۱۵	۲۱۷
۱ - ۱۵ مفهوم برجسته		۲۱۷
۲ - ۱۵ رابطه های حاکم الاستودینامیک در مختصات مرزی مقیاس شده		۲۲۲
۳ - ۱۵ روش باقیمانده های وزنی		۲۳۰
۴ - ۱۵ ماتریس سختی دینامیکی		۲۳۷
۵ - ۱۵ معادلات الاستودینامیک دوبعدی		۲۴۱

۲۴۷.....	۱۵ - ۶	معادلات انتشار.....
۲۵۵.....	۱۵ - ۷	استنتاج روابط بر پایه اصول کار مجازی.....
۲۶۱.....	۱۶	استاتیک.....
۲۶۴.....	۱ - ۱۶	بارهای حجمی صفر شونده.....
۲۶۹.....	۲ - ۱۶	محیط بی کران دو بعدی.....
۲۸۳.....	۳ - ۱۶	بار حجمی.....
۲۸۷.....	۴ - ۱۶	انواع بارهای حجمی.....
۲۸۷.....	۱ - ۴ - ۱۶	بار متمرکز.....
۲۹۰.....	۲ - ۴ - ۱۶	بار حجمی تابعی از مؤلفه شعاعی.....
۲۹۴.....	۵ - ۱۶	تنش اولیه.....
۲۹۷.....	۱۷	ماتریس جرم محیط کران دار.....
۲۹۷.....	۱ - ۱۷	الاستودینامیک.....
۳۰۳.....	۲ - ۱۷	انتشار.....
۳۰۷.....	۱۸	بسط مجانب فرکانس بالای سختی دینامیکی محیط بی کران.....
۳۱۷.....	۱۹	حل عددی سختی دینامیکی، پاسخ ضربه واحد و جابه جایی محیط بی کران.....
۳۱۸.....	۱ - ۱۹	سختی دینامیکی.....
۳۲۰.....	۲ - ۱۹	پاسخ ضربه واحد.....
۳۲۰.....	۱ - ۲ - ۱۹	تبدیل فوریه معکوس.....
۳۲۳.....	۲ - ۲ - ۱۹	جداسازی زمان.....
۳۲۶.....	۳ - ۱۹	جابه جایی.....
۳۲۹.....	۲۰	پاسخ تحلیل در حوزه فرکانس.....
۳۳۰.....	۱ - ۲۰	جابه جایی.....
۳۳۸.....	۲ - ۲۰	سختی دینامیکی محیط کران دار.....
۳۴۰.....	۳ - ۲۰	سختی دینامیکی محیط بی کران.....
۳۴۳.....	۴ - ۲۰	جابه جایی نقاط حوزه دور.....
۳۴۵.....	۲۱	مطالب تکمیلی.....
۳۴۶.....	۱ - ۲۱	تغییر مشخصات مصالح در مؤلفه شعاعی.....
۳۵۴.....	۲ - ۲۱	الاستودینامیک تراکم ناپذیر.....
۳۵۵.....	۳ - ۲۱	مجموعه کاهش یافته توابع پایه.....
۳۵۷.....	۴ - ۲۱	محیط بی کران دو بعدی لایه ای.....
۳۵۹.....	۵ - ۲۱	منشور سه بعدی بی کران با مقطع غیر همگن.....

۲۲	زیرساختار سازی.....	۳۶۳
۲۳	مثال‌هایی برای محیط کران‌دار.....	۳۶۹
۲۳ - ۱	ورق ناهمسان‌گرد لبه ترک‌دار با محور مصالح چرخیده تحت برش.....	۳۷۰
۲۳ - ۲	ورق دو جنسی لبه ترک‌دار تحت کشش.....	۳۷۲
۲۳ - ۳	ورق دو جنسی ناهمسان‌گرد با ترک عمود بر و پایان یافته تا وجه مشترک.....	۳۷۴
۲۳ - ۴	ورق دایره‌ای ناهمسان‌گرد با ترک مرکزی.....	۳۷۶
۲۳ - ۵	ورق دو جنسی ناهمسان‌گرد با ترک مرکزی تحت کشش.....	۳۷۸
۲۳ - ۶	ضریب شدت تنش دینامیکی.....	۳۷۹
۲۳ - ۷	ورق دو جنسی با تکینگی شار در انتشار.....	۳۸۲
۲۳ - ۸	پی سطحی روی نیم‌صفحه با بارگذاری ناپیوسته.....	۳۸۶
۲۴	مثال‌هایی برای محیط بی‌کران.....	۳۹۱
۲۴ - ۱	پی منشوری مدفون در نیم‌فضا.....	۳۹۲
۲۴ - ۲	حفره کروی مدفون در فضای کامل.....	۳۹۹
۲۴ - ۳	حرکت درون صفحه گوه نیمه بی‌نهایت.....	۴۰۴
۲۵	برآورد خطا و انطباق پذیری.....	۴۰۷
۲۵ - ۱	برآورد خطا در تحلیل عددی.....	۴۱۰
۲۵ - ۲	تنش بازیابی شده در روش اجزای محدود.....	۴۱۱
۲۵ - ۳	بازیابی تنش در روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده.....	۴۱۵
۲۵ - ۴	برآورد خطا در روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده.....	۴۱۹
۲۵ - ۵	مثال برای بازیابی تنش و برآورد خطا.....	۴۲۳
۲۵ - ۵ - ۱	ورق نامحدود با سوراخ دایره‌ای تحت کشش محوری.....	۴۲۳
۲۵ - ۵ - ۲	مدل کران‌دار.....	۴۲۴
۲۵ - ۵ - ۳	مدل بی‌کران.....	۴۲۹
۲۵ - ۶	تطابق پذیری سلسله‌مراتبی.....	۴۳۲
۲۵ - ۷	مثال‌هایی برای انطباق پذیری.....	۴۳۶
۲۵ - ۷ - ۱	ورق با دو سوراخ مربعی تحت کشش تک‌محوری.....	۴۳۶
۲۵ - ۷ - ۲	پی استوانه‌ای مدفون در نیم‌فضا.....	۴۳۹
۲۶	نتیجه‌گیری.....	۴۴۵
	مراجع.....	۴۵۷
	فهرست راهنما.....	۴۶۱
	پیوست فصل ۲۵. ورق‌ها.....	۴۶۵

مقدمه مترجم

برای مدل‌سازی اثر خاک و بررسی اندرکنش آن با محیط در سازه‌های مهم مثل سدها، سازه‌های بلند، تونل‌ها و نیروگاه‌ها بایستی از روش‌های تحلیلی دقیق همانند روش اجزای محدود یا اجزای مرزی استفاده نمود. شرایط مرزی خاک به‌عنوان یک ناحیه بی‌کران، با استفاده از مدل‌های اجزای محدود به‌درستی ارضا نمی‌شود و احتیاج به یک مدل بزرگ و حجم حافظه قابل توجه رایانه‌ای و زمان تحلیل زیاد دارد. برای مثال، به‌منظور مدل کردن محیط خاکی در پروژه‌های بهسازی لرزه‌ای هتل آزادی و هتل استقلال در تهران (به‌مدیریت مهندسی و اجرایی اینجانب) با روش اجزای محدود، نیاز به مدلی با حجم ۳ میلیون جزء بود که با توجه به‌ابزار در دسترس مقرون به‌صرفه نبوده است. از طرف دیگر، در مدل‌های اجزای مرزی نیز به یک حل بنیادی نیاز است که برای بیشتر مسائل، این حل وجود ندارد.

برای حل دقیق مسئله اندرکنش خاک و سازه، شیوه جایگزین جدیدی به‌نام اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده (SBFEM) در دانشگاه صنعتی سوئیس ETH زوریخ توسعه پیدا کرد. این روش که یک شیوه اجزای محدود بر پایه اجزای مرزی است، در پروژه‌های مذکور (دو هتل بزرگ تهران) مورد استفاده قرار گرفت. روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده با تلاش‌های محاسباتی خیلی کمتر نسبت به روش اجزای محدود و اجزای مرزی محیط نامحدود، خاک را به‌صورت دقیق مدل می‌کند، لذا صرفه‌جویی قابل توجهی در زمان و هزینه تحلیل مسائل اندرکنشی بزرگ در پی خواهد داشت. علاوه‌براین، روش مذکور در تحلیل مسائل مکانیک شکست، تمرکز تنش در نوک ترک، مسئله انتشار و تحلیل دینامیکی اندرکنش خاک - سازه کاربرد دارد که در متن کتاب با مثال‌های مختلف به‌آنها اشاره شده است.

با توجه به‌منابع آموزشی و کاربردی بسیار محدود در زمینه آشنایی با روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده، کتاب حاضر که حاصل زحمات پروفیسور جان. پ. ولف می‌باشد، از ساختار مناسبی برخوردار بوده و ضمن تشریح کامل مبانی روش و ارائه مثال‌های کاربردی در زمینه‌های مختلف،

می‌تواند به‌عنوان یک مرجع آموزشی مهم مورد استفاده قرار گیرد. در این راستا تصمیم بر این شد که کتاب مذکور ترجمه گردد تا از طریق تدریس و ارتباط دانشجویان و اساتید با این روش تحلیلی، تلاشی جهت اشاعه و توسعه آن در کنار روش‌های تحلیل عددی موجود بین قشر محقق صورت گرفته باشد. مطالعه و آشنایی با روش ارائه شده در این کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دکترای عمران در گرایش‌های سازه و خاک و پی و به‌خصوص در مواردی که مسئله اندرکنش استاتیکی و دینامیکی خاک و محیط در سازه‌های بزرگ مطرح است یا مسائل مکانیک شکست و ترک‌خوردگی سازه‌ها توصیه می‌شود. اینجانب نیز دوره این روش را در چندین دانشگاه ایران براساس محتوی کتاب حاضر تدریس نموده‌ام که نتیجه آن نیز برای دانشجویان جهت کاربرد در پروژه‌های تحقیقاتی و تحلیل‌های عددی رضایت‌بخش بوده است.

در اینجا لازم می‌دانم از خانم الهه جعفری که در ترجمه فارسی کتاب زحمات زیادی را کشیده و همکاری بسزایی داشته‌اند قدردانی نمایم. از آقای دکتر آرش نیری که ویرایش کتاب را با دقت بسیار بر عهده گرفتند سپاس‌گزاری می‌نمایم.

همچنین قدردان جناب آقای مهندس حبیب مکارم، پسرعمه گرامی‌ام در شیراز، به‌خاطر پیشنهادات ارزشمندشان برای تصحیح و ویراستاری کتاب هستم. از پروفیسور جان. پ. ولف استاد راهنمای پایان‌نامه دکترای اینجانب در دانشگاه ETH برای حمایت‌های مداوم در طول ۲۵ سال کمال تشکر را دارم.

در پایان از خانم مهناز عزب‌دفتری و همکاران‌شان که امورات فنی و هنری کتاب و چاپ آن را با دقت و کیفیت بالا صمیمانه به‌انجام رسانیدند، تشکر می‌نمایم. در صورت وجود هرگونه ابهام یا سؤال در رابطه با محتوی و مطالب کتاب یا وجود ایرادات احتمالی می‌توانید با آدرس ایمیل اینجانب مکاتبه نمایید.

ساسان محاسب

دکترای مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی ETH زوریخ

کارشناسی ارشد - دانشگاه استنفورد

smteam@gmx.ch

آبان ۱۳۹۱، تهران

پیش‌گفتار

در ابتدای قرن ۲۱ انواع مختلف مسائل مکانیک جامدات و به‌طور کلی مسائل مکانیک پیوسته که به‌صورت ریاضی فرمول‌بندی شده‌اند، بسیار بزرگ و پیچیده است. مدل‌هایی وجود دارد که رفتار مکانیکی هر نوع مصالحی را تحت شرایط متنوع بارگذاری ارائه می‌کنند. رفتارهای الاستیک، پلاستیک، ویسکوالاستیک و دیگر رفتارهای مصالح همسان یا ناهمسان تحت بارهای استاتیکی یا دینامیکی، توسط سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی یا انتگرالی ارائه می‌شوند. فرمول‌بندی‌های مسائل مربوط به مصالح جدید، گسیختگی، برخورد، خستگی و سایر رفتارهای سازه‌ای، شناخته‌شده هستند. با این حال، حل دقیق این فرمول‌بندی‌های ریاضی در اکثر حالات مجهول بوده و تنها چند حالت بنیادی با هندسه و شرایط مرزی ساده می‌توانند به‌صورت تحلیلی حل شوند.

تنها روش واقع‌بینانه در حل مسائل مکانیک جامدات، جداسازی است. در ابتدا، این عمل با ارائه جواب برحسب تعداد متناهی از پارامترهایی که ضرایبی از بسط سری مجانب بوده و در روش کلاسیک تحلیل خمش صفحه مستطیلی رخ می‌دهد، انجام می‌شده است. در ادامه، با استفاده از یک سری توابع شکل انتخاب شده که در طول دامنه امتداد دارند انجام می‌گردید. در این روش، مانند روش Trefftz، دامنه این توابع به عنوان مجهول مسئله در نظر گرفته می‌شود. ایده جدیدی با روش تفاضل محدود به‌وجود آمد که عنوان می‌کرد متغیر میدان برحسب مقادیرش در تعدادی نقاطی که در دامنه به‌طور مساوی تقسیم شده‌اند، بیان گردد. معادله حاکم و مشتق‌های تخمینی آنها، در هر نقطه داخلی اعمال می‌شود. روش اجزای محدود یک گام جلوتر به سمت جداسازی پیش می‌برد. نه تنها متغیر میدان برحسب مقادیرش در یک سری نقاط بیان می‌شود، که دامنه نیز به اجزاهایی تقسیم شده و توابع بنیادی محلی برای درون‌یابی استفاده می‌شوند.

روش اجزای محدود در طی چهل سال بهبود پیدا کرد تا تبدیل به روشی برای حل تقریباً هر مسئله مکانیک محیط پیوسته که برای آن فرمول‌بندی وجود دارد، شود. در این راستا، ایده‌های نوینی نظیر فرمول‌بندی بدون شبکه‌بندی، پیشرفت‌های جدیدی از اصل جداسازی دامنه هستند. با وجود این حقیقت که روش اجزای محدود روشی توانا، کلی و با قابلیت به‌کارگیری برای هر نوع مسئله مکانیک جامدات است، مشکلاتی در مسائل خاص نظیر تحلیل دینامیکی محیط‌های بزرگ و بی‌کران، انتشار ترک، برخورد و دیگر مسائل تمرکز تنش به همراه دارد. این مشکلات به‌همراه فرآیند کسل‌کننده جداسازی اجزای محدود، باعث ابداع روش اجزای مرزی می‌گردد که در این شرایط،

معادلات حاکم بر مسئله مقدار مرزی، به شکل معادلات انتگرال مرزی بیان می‌شوند. در نتیجه، جداسازی متغیر میدان به مرز دامنه محدود خواهد شد. اجزاهای گره‌ها، توابع شکل و عوامل بنیادی دیگر روش اجزای محدود، جزیی از روش اجزای مرزی هستند، اما به مرز مقید می‌باشند. مزیت بزرگ این روش یعنی کاهش بعد مسئله به یک، برای دامنه‌های نامحدود و بزرگ کاملاً آشکار است. مسائل مرتبط به انتشار ترک یا مکانیک برخورد نیز از مزایای مشهود محدود کردن جداسازی به مرز دامنه می‌باشند.

این واقعیت که روش المان محدود برای مسائل خاص مکانیک محیط پیوسته با مشکلاتی همراه بوده و کمبودهایی دارد، نه تنها باعث گستردگی استفاده از روش اجزای مرزی در آن زمینه‌ها می‌شود، بلکه زمینه را برای ظهور سایر روش‌های عددی فراهم می‌کند. روش نوین ارائه شده توسط جان. پ. ولف در این کتاب، گام دیگری در جهت‌دهی به روش‌های عددی برای غلبه بر مشکلات روش اجزای محدود است. روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده، جهت حل انواع خاص مسائل مکانیک محیط پیوسته مناسب بوده و ضمن برخورداری از مزایای هر دو روش اجزای محدود و اجزای مرزی، موانع آنها را برطرف می‌کند. مسلماً این روش محدودیت‌های خاص خود را دارد که باعث می‌شود تنها بر تعدادی مسائل مکانیک محیط پیوسته مشخص اما مهم تمرکز داشته باشد. محققین و مهندسان علاقه‌مند به تحلیل مسائل اندرکنش خاک - سازه، انتشار، مکانیک شکست و زمینه‌های دیگر می‌بایست علاوه بر آشنایی با این روش، از مزیت‌های آن استفاده نموده و برای بهره‌برداری در سایر زمینه‌ها تلاش نمایند. این روش قابل اعمال به هر مسئله مکانیک محیط پیوسته است که معادلات دیفرانسیل جزیی بر تحلیل آن حاکم باشند. در این روش نیمه تحلیلی، یک روند مقیاس‌بندی در جهت شعاعی اعمال شده تا جداسازی را به راستای محیطی محدود نماید. کتاب‌های زیادی در ارائه این روش برای حل مسائل مهندسی وجود ندارد. این کتاب نیز نتیجه تلاش‌های متمادی و خلاقیت بی‌نظیر نویسنده به سرانجام رسیده است. در تلاش برای به دست آوردن روشی برای حل مسائل دینامیکی اندرکنش خاک - سازه، (همان‌طور که در کتاب *مدل‌سازی اجزای محدود محیط بی‌کران*، Wiley) ۱۹۹۶ نویسنده روشی را ابداع نموده که در طیف وسیعی از مسائل با محیط‌های محدود و نامحدود از مسائل مهندسی بسط می‌یابد. انتظار می‌رود که در آینده پیشرفت‌های بیشتری در توسعه و تکمیل این روش نوین محاسباتی رخ دهد.

Jose Dominguez
دانشگاه سویل، اسپانیا

مقدمه مؤلف

پُرکاربردترین روش محاسباتی در مکانیک جامدات و بسیاری دیگر از زمینه‌های مهندسی و فیزیک، روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی هستند. برای مثال در استاتیک، حل پیوسته مجهول با معادلات جبری برحسب پارامترهای معرف حل تخمینی، جایگزین می‌شود. هر دو روش، ویژگی‌ها، معایب و مزایای خاص خود را دارند. از آنجایی که این کتاب برای تحلیل‌گران عددی باتجربه در زمینه‌های خاص جذاب است، ارائه توصیف فنی مبسوط‌تر از روش نوین به‌همراه انگیزه برای ارتقای آن در مقدمه مناسب است. کسانی که با تحلیل عددی آشنایی دارند می‌توانند از شش پاراگراف اول بگذرند. لازم است اشاره شود که روش نوین اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده، مزایای هر دو روش اجزای محدود و اجزای مرزی را ترکیب نموده و همچنین ویژگی‌های منحصر به‌فرد خود را نیز دارا می‌باشد که در ادامه تشریح می‌گردد.

در روش اجزای محدود، دامنه به‌اجزایی که هم‌پوشانی نداشته باشند جداسازی می‌شود. به‌عنوان مثال در هر کدام از این اجزاء، توابع شکل به‌فرم چندجمله‌ای، جابه‌جایی‌ها را درون‌یابی می‌کنند. انتگرال عددی استاندارد از این توابع منظم، به‌تخمین ساده‌ای از رفتار هر جزء منجر می‌گردد که شامل ماتریس‌های جرم و سختی دینامیکی (متقارن) است. سپس پاسخ‌های محلی، با اعمال معادلات سازگاری و تعادل، سرهم‌شده و مدل کلی را تشکیل می‌دهند. انعطاف‌پذیری زیادی در بیان هندسه و مشخصات مصالح در این روش وجود دارد. برای یک محیط بی‌کران، روش اجزای محدود قادر به‌ارضای دقیق شرایط مرزی در بی‌نهایت نیست. روش جداسازی فضایی بر یک مرز مصنوعی، جایی که دامنه بریده‌شده بیرون از مرز تا بی‌نهایت تنها می‌تواند به‌صورت تخمینی بیان شود، خاتمه می‌یابد.

در روش اجزای مرزی، تنها مرز محیط به‌صورت فضایی به‌اجزا جداسازی می‌شود که منجر به‌کاهش بعد فضایی به‌یک می‌گردد که عمل تلاش محاسباتی و تعداد مجهول‌ها را کاهش می‌دهد. اگرچه لازم است یک حل بنیادی که باید معادله دیفرانسیل حاکم در دامنه را ارضا نماید، وجود داشته باشد. این حل تحلیلی که تکینیتی به‌وجود می‌آورد، گاهی می‌تواند بسیار پیچیده باشد. در هر جزء مرزی، توابع شکل در فرم چندجمله‌ای‌ها، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های سطحی را درون‌یابی می‌کنند. انتگرال‌های عددی فضایی از این چندجمله‌ای‌ها با حل بنیادی شامل تکینیتی‌ها، منجر به‌ماتریس نامتقارن ضرایب می‌گردد. از آنجایی که حل بنیادی شرایط مرزی در بی‌نهایت را به‌طور دقیق ارضا

می‌کند، روی اجزای مرزی، برای مدل کردن محیط بی‌کران بسیار مناسب است. به‌طور کلی، روش اجزای محدود و اجزای مرزی، با کاهش اندازه اجزا به‌حل دقیق همگرا می‌شوند و در همگرایی آرام بوده و نزدیک به نقطه تکینی تنش که اطراف نوک ترک در مکانیک شکست رخ می‌دهد، قرار دارد، زیرا هر دو روش برای درون‌یابی جابه‌جایی‌ها از توابع چندجمله‌ای استفاده می‌کنند. جهت دستیابی به دقت قابل قبول، به‌روش‌های خاص و تعداد بیشتر جزء محدود یا جزء مرزی نیاز است.

در اکثر موارد کاربردی، شکل مرز، تغییرات خصوصیات مصالح، تغییرات بارهای درون دامنه و شرایط مرزی محیط، مانع از امکان حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم می‌گردد. با این حال، اگر معادلات دیفرانسیل معمولی بر مسئله فیزیکی حاکم باشند، در موارد مهم، روش‌های کلاسیک ریاضی می‌تواند منجر به حل تحلیلی دقیق برای متغیر مستقل شود. به‌عنوان مثال، در مسائل متقارن یک‌بعدی معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم در جهت شعاعی می‌تواند به‌طور دقیق حل شود، در حالی که در مسئله سه‌بعدی امکان حل تحلیلی وجود ندارد. جهت به‌کارگیری این مزیت، حتی در مسائل نامتقارن، یک سیستم مختصات شامل یک امتداد شعاعی و دو راستای محلی محیطی (موازی با مرز) معرفی می‌شود و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم به‌این سیستم مختصات انتقال می‌یابند. مرز در راستای شعاعی با اجزای محدود سطحی جداسازی شده و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم را به معادلات دیفرانسیل معمولی در جهت شعاعی کاهش می‌دهد. ضرایب معادلات دیفرانسیل معمولی توسط تخمین اجزای محدود در امتداد محیطی تعیین می‌شوند، سپس معادلات دیفرانسیل معمولی در امتداد شعاعی به‌صورت تحلیلی حل می‌شوند. بنابراین یک روش نوین به‌نام روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده که دارای ترکیبی از مزایای هر دو روش می‌باشد، ارائه شده است. این روش یک روند نیمه‌تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی (خطی) می‌باشد. در راستاهای محیطی (موازی با مرز)، جایی که رفتار در آن نرم است، تخمین وزن‌های باقیمانده از اجزای محدود اعمال می‌شود که منجر به همگرایی در تحلیل پاسخ‌ها می‌گردد و در راستای شعاعی نیز حل دقیق است. برای یک محیط کران‌دار، مختصات شعاعی از مرز به سمت داخل قرار می‌گیرد، به‌گونه‌ای که در حضور تکینی‌ها، حل تحلیلی اجازه می‌دهد عامل شدت تنش به‌طور مستقیم محاسبه شود. برای محیط بی‌کران، مختصات شعاعی از مرز به سمت بی‌نهایت قرار می‌گیرند، به‌گونه‌ای که شرایط مرزی در بی‌نهایت (شرایط تابش) می‌تواند به‌طور دقیق در حل تحلیلی به‌کار گرفته شود.

ویژگی‌های مختصری که در مورد روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی بیان شد، نشان می‌دهد که هر دو روش مزایایی دارند. ترکیب کردن این مزایا منجر به ارائه روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده می‌گردد، به‌بیان دیگر، روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده، محاسن هر دو روش مذکور را دارا می‌باشد، در حالی که اکثر ویژگی‌های جذاب هر دو روش حفظ شده‌اند. از مزایای

این روش آن است که به حل بنیادی نیاز نمی‌باشد، (بنابراین کاربرد روش برای مصالح غیرهمسان بدون افزایش دشواری تحلیل گسترش یافته است) از ایجاد انتگرال‌های تکین پرهیز می‌شود، از آنجا که تنها مرز با اجزای سطحی جداسازی می‌شود، بعد فضایی مسئله به یک کاهش یافته و متناسب با آن آماده‌سازی داده‌ها و تلاش محاسباتی نیز کاهش می‌یابد، شرایط مرزی در بی‌نهایت به‌طور دقیق ارضا می‌شود و همچنین علاوه بر تخمین اجزای سطحی روی مرز، هیچ تخمین دیگری معرفی نمی‌گردد. علاوه بر این، روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده ویژگی‌های جذاب خود را داراست؛ از جمله اینکه یک حل تحلیلی درون دامنه به دست می‌آید که اجازه می‌دهد عامل‌های دقیق شدت تنش به‌طور مستقیم تعیین شوند و همان‌طور که تشریح خواهد شد، هیچ‌گونه جداسازی فضایی از مرزهای آزاد و گیردار بین مصالح مختلف لازم نیست.

به‌طور خلاصه، روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده، یک روش اجزای مرزی بدون جواب و نیمه‌تحلیلی بر پایه روش اجزای محدود است. با توجه به ترجمه عنوان مقاله مشهور پروفیسور Zienkiewicz، سعادت هر دو عالم به دو روش قابل دستیابی است: با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی و با استفاده از روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی در روندهای حل عددی.

روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده طی سال‌های اخیر برای محیط‌های کران‌دار و بی‌کران توسعه داده شد تا بتواند الاستودینامیک و مسئله انتشار را به‌عنوان مثال‌هایی از حل معادلات دیفرانسیلی حاکم خطی توصیف نماید. همچنین علاوه بر شرایط استاتیکی، هر دو روش تحلیل در حوزه‌های زمان و فرکانس، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. دو روش استنتاج ارائه شده است. روش استنتاج بر مبنای اصول مکانیک که در ابتدا توسعه یافته و سرهم‌بندی اجزای محدود و تشابه را بر اساس اصول مکانیک می‌کند، و به‌روش جدید به‌نام «روش سلول جزء محدود بسیار کوچک سازگار» منجر می‌گردد. روش استنتاج دیگری که اخیراً بر مبنای تبدیل مرز مقیاس‌شده توسعه یافته تا روند حل مسئله را ساده و مؤثرتر نماید، از معادلات دیفرانسیل جزیی حاکم آغاز می‌کند. سپس روش وزن‌های باقیمانده اعمال می‌شود که از نظر ریاضی جذاب‌تر بوده و با تکنولوژی اجزای محدود امروزی سازگارتر است. با توسعه این روش عملکرد آن در مجله‌های تخصصی منتشر شده که نتایج بخشی از این مطالعات جدید نیز در بخشی از کتاب ارائه شده است.

کتاب پیش‌رو در ارتباط با روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده دو هدف را دنبال می‌کند که می‌توانند به‌طول مستقل مورد توجه باشند. در بخش دوم، روش‌های استنتاج و حل معادلات بنیادی (که شامل کاربردها در زمینه‌های ذکر شده در بالا برای حالت کلی و با جزییات کامل می‌باشد) به‌عنوان هدف اول آورده شده است. از آنجا که برای یک دانشجوی یا مهندس با تخصص واحد لازم نیست با چنین شرح گسترده و کاملی مواجه شود، مطالب ابتدایی، به‌عنوان هدف دوم، در بخش اول این کتاب آمده است. این بخش یک متن پایه و بدون نیاز به پیش‌زمینه است که در عین حال تمامی وجوه مطلب را پوشش می‌دهد، گرچه ارتباطات با روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی نیز

می‌بایست آشکار شود. توانایی روش محدود نباید در کاربردی خاص و کوچک قرار گیرد و در عین حال می‌بایست امکان یک تفسیر فیزیکی کلی را فراهم آورد. بخش ابتدایی جهت ایجاد جذابیت برای دانشجو، خودمحتوی می‌باشد. لازم است بخش ابتدایی شامل معرفی مختصری از تحلیل عددی باشد و همچنین برای خواننده با تجربه در روش اجزای محدود یا اجزای مرزی، این امکان را فراهم کند که با کمترین مشکل به ویژگی‌های منحصر به فرد روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده پی ببرد. پس از کنکاش در مراجع تخصصی مشخص شد که خواننده می‌تواند در زمینه حرفه‌ای خود به این روش تسلط یابد. در متن این کتاب ارائه دفترچه راهنمایی شامل مجموعه قوانین حل عددی تقریبی مورد انتظار نیست. در این راستا قانون مشهور پل لایت (جایی برای پرسش نیست، می‌بایست انجام داد یا مرد؛ بعد از لرد تنیسون؛ سال ۱۸۹۲ - ۱۸۰۹) نباید پیروی شود. مهم آن است که توصیفی از اصول پایه وجود داشته باشد تا روش عددی بر پایه آن به دست آید. این کار سبب می‌شود خواننده درک بهتری داشته که منجر به بسط و اعمال روش به مسائل مشکل به شکل مناسب و صحیح می‌گردد.

همان‌طور که اشاره شد، برای دستیابی به این دو هدف، یک بخش *مقدماتی* نوشته شده که دو مقاله کنفرانس را بسط می‌دهد. یک *مسئله مدل* که درک آن ساده بوده و ساده‌ترین مسئله انتشار موج نیز مورد بررسی قرار گرفته که تمامی ویژگی‌های مورد نیاز را دارا می‌باشد. به‌عنوان مثال معادله موج اسکالر در دو بعد از این ویژگی‌هاست که نقش اساسی را در بسیاری از مسائل مهندسی و فیزیکی ایفا می‌کند. برای به دست آوردن معادلات حاکم و روند گام به گام حل مسئله با جزییات مفصل، از یک گوه به‌عنوان محیط کران‌دار و از یک گوه نیمه‌بی‌نهایت بریده‌شده به‌عنوان محیط بی‌کران استفاده شده است. خواننده می‌تواند تمامی وجوه توسعه و کاربرد مسئله مدل را بدون نیاز به محاسبات و یادداشت خاصی دنبال کند. این موارد در فصل‌های ۳ تا ۱۴ از بخش اول که در واقع هسته بخش پایه را تشکیل می‌دهند، آورده شده است. جهت تکمیل محتوی کتاب، در فصل ۱ اصول استاندارد تحلیل عددی بحث و ویژگی‌های منحصر به فرد روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده در فصل ۲ آورده شده است. در انتهای بخش دوم، سه پیوست کوچک وجود دارد که درک عمیق‌تری از وجوه خاص مسئله مدل را به دست می‌دهند و ارتباطی را با مسائل دو و سه بعدی عمومی استاتیکی، الاستودینامیک و انتشار از بخش دوم برقرار می‌سازند. در فصل‌های ۱۵ تا ۲۲ از بخش دوم، معادلات بنیادی و روش‌های حل برای حالت کلی، با جزییات کامل تشریح شده است. جهت توضیح بیشتر، فصل‌های ۲۳ و ۲۴ به توصیف مثال‌هایی از محیط‌های کران‌دار و بی‌کران می‌پردازند تا قابلیت انطباق‌پذیری و مزایای این روش را نشان دهند. ارزیابی خطا و انطباق‌پذیری بر اساس تکنیک بازیابی تنش، در فصل ۲۵ مورد بحث قرار گرفته است. فصل ۲۶ به نتیجه‌گیری و محدودیت‌های این روش جدید (جایی که روش‌شنایی هست، تاریکی نیز هست) و ارائه پیشنهاداتی برای تحقیقات آینده می‌پردازد، بنابراین، بخش دوم تمامی وجود ممکن روش جدید را بیان می‌کند.

انتظار می‌رود اکثر خوانندگان پس از بررسی عمیق استنتاج‌ها و روش‌های حل برای مسئله مدل در بخش اول و با به‌دست آوردن شمای کلی، مطالب مرتبط با تخصص خود را در بخش دوم جستجو کنند. سایر افراد نیز تنها بخش اول را مطالعه نموده و با کسب آشنایی نسبی از این روش خشنود خواهند بود. یک تحلیل‌گر عددی با تجربه می‌تواند مستقیم به مطالعه بخش دوم بپردازد و تنها زمانی مدل مسئله را مطالعه کند که به یک موضوع خاص از کلیات روش نیاز داشته باشد. جهت ساده‌سازی رفت و برگشت بین بخش‌های اول و دوم، تا حد امکان از عنوان‌های مشابهی در فصل‌ها استفاده شده است.

این کتاب براساس تحقیقات و پیشرفت‌های به‌دست آمده حد فاصل سال‌های ۱۹۹۸ - ۱۹۹۴ توسط دکتر چانگمین سانگ می‌باشد. خدمات خلاقانه و قابل توجه او در ویژگی‌های کلیدی و همچنین راهنمایی‌های او قابل تقدیر است. او نویسنده دوم و در بسیاری موارد نویسنده اول مقاله‌های نوشته‌شده در این موضوع در طی این سال‌ها همچنین نویسنده دوم کتاب (مدل‌سازی اجزای محدود محیط بی‌کران، انتشارات وایلی؛ ۱۹۹۶) بوده است. این کتاب اصول و نتایج روش سلول جزء محدود بسیار کوچک را بیان می‌کند که نام این کتاب در ابتدا روش جزء محدود مرزی مقیاس شده بود. دکتر سانگ، نویسنده دوم، برای انتشار موفق‌تر و با کیفیت بهتر این کتاب کاملاً مناسب بودند، متأسفانه ایشان به دلیل قطع کمک‌هزینه‌های تحقیقات، به یک شرکت مهندسی مشاور سازه‌ای جهت طراحی سقف‌های با پیچیدگی زیاد، ملحق شدند.

مشارکت با دکتر اندرو. ج. دیکز از دانشگاه وسترن استرالیا در سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۲، منجر به پیدایش روش ارزیابی خطا و روش‌های انطباق‌پذیر گشت که امکان اثبات کارایی محاسباتی روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده را فراهم نمود، همچنین خدمات شایان ذکر ایشان در بسیاری از زمینه‌ها قابل تقدیر است.

همان‌طور که اشاره شد، بخش اول با فصل‌های ۱ و ۲، برای دانشجویان پیشرفته دوره کارشناسی پیش و سال اول دوره کارشناسی ارشد، می‌تواند به‌عنوان کتاب درسی در تحلیل عددی به کار رود و به هیچ پیش‌نیازی از دروس ارائه شده در دانشگاه نیاز نیست. علاوه بر این، کتاب حاضر برای یک تحلیل‌گر باتجربه در بسیاری از زمینه‌های مهندسی نظیر مکانیک مهندسی، آکوستیک، مهندسی زلزله، الکترومغناطیس و ریاضیات محاسباتی، می‌تواند این امکان را فراهم آورد که خواننده به روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده در زمینه خاص و کاربرد مناسب آن تسلط یابد و از دانش قبلی خود به‌نحوه مناسب بهره‌برد. در نهایت، این روش نوین می‌تواند زمینه گسترده‌ای برای تحقیق در زمینه‌های مختلف نظیر مدل‌سازی مسائل با وجود تکینی تنش و تحلیل اندرکنش دینامیکی سازه - محیط بی‌کران باشد.

John P. Wolf

جان. پ. ولف

مؤسسه تکنولوژی فدرال سوییس

مبانی تحلیل عددی

این فصل مقدمه‌ای در مورد تحلیل عددی و به‌طور خاص روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی ارائه می‌دهد. کاربرد این فصل علاوه بر توصیف مقدماتی برای کاربران مبتدی، باید برای خوانندگانی که دانش آنها در زمینه روش‌های محاسباتی با گذشت زمان فرسوده شده، سودمند باشد. هدف نهایی این فصل معرفی و توصیف اصطلاحات به‌کار رفته در کل کتاب است. هرچند ممکن است علائم به‌کار رفته در مثال ساده این مقدمه به‌طور غیرضروری پیچیده به‌نظر برسد، اما توجه به‌آن برای موارد پیچیده‌تر در فصل‌های ۱ و ۲ ضروری است. خواننده آشنا به‌روش اجزای محدود و در سطح پایین‌تر به‌روش اجزای مرزی، در یک گرایش خاص می‌تواند از فصل ۱ گذشته و به‌فصل ۲ بپردازد. نظر اجمالی به‌روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده در بند ۱ - ۶ نیز برای ارضای کنجکاوی خواننده کافی است.

در فصل ۱، تنها ویژگی‌های اصلی از تحلیل عددی بررسی شده که برای فهم روش اجزای محدود مرزی مقیاس‌شده برای نوع مسائل مطرح‌شده لازم است. این فصل با حذف پیشرفت‌های مهم که تا حدی برخی پیچیدگی رابطه‌سازی‌ها را کاهش می‌دهد، محدود به‌ساده‌ترین حالات روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی می‌باشد.

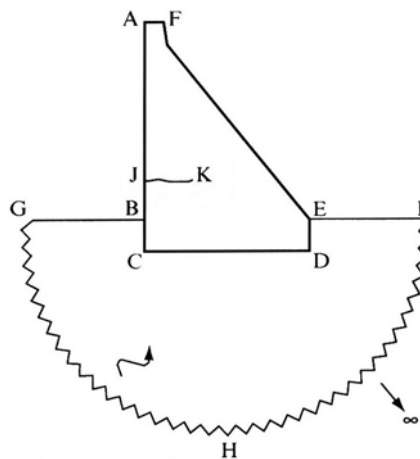
در بسیاری از قسمت‌های این فصل، تا حدودی از ذکر نکات پیچیده ریاضی چشم‌پوشی شده است.

در تشریح روش اجزای محدود، کتاب‌های پایه‌ای بسیار خوبی (نظیر مراجع [B2] و [B3])

همچنین در معرفی روش اجزای مرزی (مراجعی نظیر [P2] و [B4]) وجود دارند. مرجع [B4] حاوی بحث مفیدی در مورد رابطه‌سازی باقیمانده‌های وزنی^۱ که اساس روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی را تشکیل می‌دهد، می‌باشد که بند ۱ - ۳ کتاب حاضر نیز تا حد زیادی متأثر از مطالب این کتاب است.

۱-۱ مسئله فیزیکی، مدل ریاضی و حل عددی آن

برای حل مسئله فیزیکی در قالب تحلیل و طراحی، عموماً از روش تحلیل عددی استفاده می‌شود. مسئله فیزیکی واقعی موجود در طبیعت شامل پیکربندی سازه‌ای واقعی در معرض بار است. به‌عنوان مثال در شکل ۱-۱ یک سد وزنی مدفون در خاک که در اثر زمین‌لرزه تحریک شده نشان داده شده است. این سد با ابعاد محدود، با خاکی که تا بی‌نهایت ادامه دارد، در تماس دینامیکی است. مسئله فیزیکی شامل اثر متقابل^۲ محیط - سازه بدون مرز دینامیکی مورد اشاره، با سازه شامل سد (محدود) و محیط بدون مرز معرف خاک (نیمه نامحدود) است (اندرکنش لرزه‌ای خاک و سازه). به‌علاوه، ترک‌های موجود در سد که منجر به تکیگی تنش در مکانیک شکست می‌شود نیز باید بررسی شوند.



شکل ۱-۱ سد مدفون در خاک

1. Weighted-residual
2. Interaction

۱. مبانی تحلیل عددی ۳

برای توانایی در بررسی مسئله فیزیکی، ایده‌آل‌سازهای ویژه‌ای در مدل ریاضی معرفی شده‌اند (برای بحث کامل، فصل ۱ از منبع [B2] را ببینید). گزینه مدل ریاضی وابسته به پاسخ تحلیلی خواهد بود؛ به این معنا که به سؤال مطرح شده از طبیعت وابسته است. فرضیات دور از دسترس در مورد ابعاد مسئله (یک، دو یا سه‌بعدی بودن)، خطی یا غیرخطی بودن ضخامت، رفتار مصالح، هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و غیره باید در نظر گرفته شود تا معادلات دیفرانسیل حاکم نتیجه شود. از آنجا که خصوصیات فیزیکی که در مدل ریاضی حضور ندارند نمی‌توانند پیش‌بینی شوند، نتایج این مرحله قطعی و در چارچوب فرضیات خود معتبر است. به عنوان مثال، برای پیکربندی سازه شکل ۱ - ۱، مقطعی منجر به مدل خطی دوبعدی انتخاب شده، بنابراین اثرات سه‌بعدی در نظر گرفته نمی‌شود. در این شکل خط B-C-D-E بیانگر مرز بین دو زیرسازه خاک و سد بوده و یک ترک از لبه J تا رأس K ادامه می‌یابد. مدل ریاضی همچنین می‌بایست امکان پیش‌بینی مؤثر و قابل اطمینان پدیده‌های مهم را داشته باشد.

به طور کلی، مدل ریاضی نمی‌تواند دقیقاً به صورت تحلیلی حل شود. در این راستا یک حل عددی شامل جداسازی^۱ به عنوان تنها تخمین مسئله مورد نیاز است. دقت مورد انتظار در حل مسئله می‌بایست مشخص شود و اگر این دقت تعریف نشده باشد، روش حل عددی باید با افزایش تعداد مشخصه‌های جداسازی تکرار و بار دیگر، حل عددی به صورت مؤثر و قابل اطمینان ارائه شود.

واضح است که این حل عددی تنها مدل ریاضی انتخاب شده را حل می‌نماید، بنابراین بینش به دست آمده از پاسخ حل عددی، تنها آن وجوه مسئله واقعی موجود در طبیعت را پوشش می‌دهد که در مدل ریاضی وجود دارد. انتخاب یک مدل ریاضی مناسب گام کلیدی و مهم در تحلیل مهندسی است.

۱ - ۲ معادله لاپلاس برای جابه‌جایی‌های عمود بر مقطع صفحه برشی

یک مثال بسیار ساده و کاربردی در تمامی این فصل به طور خاص، مورد استفاده قرار گرفته

1. Discretisation

است. یک راه حل عددی تفصیلی با استفاده از روش های اجزای محدود و اجزای مرزی ایجاد شده است. این مثال مشابه مدل فیزیکی قبل، یک محیط محدود و گوه را مشخص می کند و برای آن روش محاسباتی نوینی ارائه شده که در فصل ۱ مورد بحث قرار می گیرد. ساختار و رویکرد ریاضی در رابطه سازی این راه حل عددی لزوماً مشابه راه حل های مورد استفاده در مسائل پیچیده تر و مهم تر است.

حرکت خارج از صفحه ای (غیر صفحه ای در قالب اصول) حرکت الاستیسیته خطی ارائه شده است. الاستیسیته سه بعدی نسبت به یک صفحه دو بعدی، به حرکت درون صفحه ای (با دو مؤلفه جابه جایی، دو مؤلفه تنش عمودی و یک تنش برشی) و حرکت خارج از صفحه تجزیه شده است. دومین حرکت (شکل ۱ - ۲)، که توسط نیروی p که در امتداد محور z عمود بر صفحه (x,y) اعمال می شود، شامل جابه جایی u موازی با محور z و دو مؤلفه تنش برشی τ_x و τ_y مربوط به نیروهای موازی با محور z است. تمامی متغیرها نسبت به محور z ثابت هستند. این جابه جایی و حالت تنش به یک صفحه برشی تحت بارگذاری متقاطع مربوط است. مختصات هر نقطه در صفحه با x و y در حوزه V^1 مشخص می شوند. تنش های برشی موجود در یک جزء بسیار کوچک در شکل ۱ - ۲ نشان داده شده اند. با حرکت به اندازه dx از وجه منفی تحت تنش τ_x به سمت وجه مثبت، مؤلفه تنش به مقدار $dx \tau_x + \tau_{x,x} dx$ تغییر می کند. رابطه تعادل استاتیکی نیروهای موازی با محور z که بر جزء بسیار کوچک با ضخامت dz عمل می کنند، به صورت زیر است:

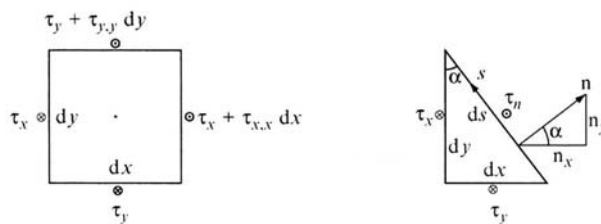
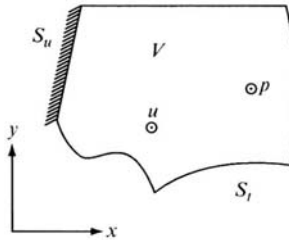
$$-\tau_x dy dz + (\tau_x + \tau_{x,x} dx) dy dz - \tau_y dx dz + (\tau_y + \tau_{y,y} dy) dx dz + p dx dy dz = 0 \quad (1 - 1)$$

با خلاصه کردن روابط بالا، رابطه زیر به دست می آید:

$$\tau_{x,x} + \tau_{y,y} + p = 0 \quad (2 - 1)$$

با داشتن نیروی p در واحد حجم (نیروی دارای ابعاد بر واحد طول^۳)، قانون پیوستگی

۱. مبانی تحلیل عددی ۵



شکل ۱-۲ حرکت دوبعدی خارج از صفحه

برمبنای مشتق جابه‌جایی برای مصالح همگن و همسانگرد^۱ به شرح رابطه زیر است:

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad (۱-۳)$$

که در آن G مدول برشی است. با جایگذاری معادله (۱-۳) در رابطه (۱-۲)، معادله دیفرانسیل حاکم بر جابه‌جایی استاتیکی در حوزه V به دست می‌آید:

$$G(u_{,xx} + u_{,yy}) + p = 0 \quad (۱-۴)$$

سطح مرزی S ، جابه‌جایی u (شرایط مرزی ضروری بر سطح S_u) یا کشش سطحی τ_n (شرایط مرزی طبیعی بر S_f) با میله‌ای که مقدار مذکور را مشخص می‌کند، برابر می‌شوند (شکل ۱-۲).

$$u = \bar{u} \text{ on } S_u \quad (۱-۵ \text{ الف})$$

$$\tau_n = \bar{\tau}_n \text{ on } S_f \quad (۱-۵ \text{ ب})$$

کشش سطحی بیانگر تنش برشی بر وجهی است که به (واحد) بیرونی عمودی $\{n\}$ با مؤلفه‌های n_x و n_y (زیرنویس n برای عمود) اعمال می‌شود. رابطه‌سازی تعادل گوه بسیار کوچک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-\tau_x dy dz - \tau_y dx dz + \tau_n ds dz = 0 \quad (۱-۶)$$

1. Isotropic

که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\tau_n = \frac{dy}{ds} \tau_x + \frac{dx}{ds} \tau_y = n_x \tau_x + n_y \tau_y = \{n\}^T \{\tau\} \quad (7-1)$$

جایگذاری معادله ۱ - ۳ در معادله ۱ - ۷ منجر به معادله زیر می‌شود:

$$\tau_n = G(n_x u_{,x} + n_y u_{,y}) = Gu_{,n} \quad (8-1)$$

مسئله مقدار مرزی شامل حل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم ۱ - ۴ تحت شرایط

مرزی معادله ۱ - ۵ با مقدار کشش سطحی بیان شده در معادله ۱ - ۸ است.

مثال مورد نظر شامل یک گوه به شکل مثلث (شکل ۱ - ۳) است که سه رأس آن در

مرکز ۰، نقطه ۱ با مختصات $x_1 = r_0, y_1 = -r_0/\sqrt{5}$ و همچنین نقطه ۲ با مختصات

$x_2 = r_0, y_2 = 0$ هستند. در وجه ۰-۱ و ۰-۲، جابه‌جایی $\bar{u} = 0$ و کشش سطحی

$\bar{\tau}_n = \bar{\tau}_y = 0$ به ترتیب بیان شده‌اند. در وجه ۱ - ۲ جابه‌جایی عمود بر صفحه (خط‌چین)

به‌طور خطی از صفر در نقطه ۱ تا \bar{u} در نقطه ۲ تغییر می‌کند. بار گسترده یکنواخت p نیز

بر گوه وارد می‌شود. در نتیجه کشش سطحی $\tau_n = \tau_x$ بر وجه ۱ - ۲ و جابه‌جایی u در

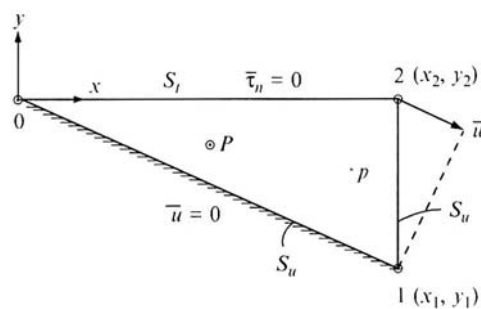
نقطه P با مختصات $(0.5r_0, -0.25r_0/\sqrt{5})$ محاسبه شده‌اند. هدف از حل مسئله آن

است که تمامی گام‌ها در روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی به‌طور تفصیلی نشان داده

شود، نه آنکه نتایج دقیق تعیین گردد.

برای $p \neq 0$ معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله گاهی معادله پواسون نامیده می‌شود

که عبارت معادله لاگرانژ نیز برای این مورد استفاده می‌گردد.



شکل ۱ - ۳ گوه به‌عنوان مثال کاربردی

۱. مبانی تحلیل عددی ۷

معادله لاپلاس (معادله ۱ - ۴) با داشتن یک تابع (جابه‌جایی در مکانیک سازه‌ای) به همراه شرایط مرزی (معادله ۱ - ۵ با معادله ۱ - ۸) مشخص شده در تابع و شار عمودی (در مکانیک سازه کشش سطحی می‌تواند به صورت تنش ارائه شود) مسائل زیادی در مهندسی و فیزیک را بیان می‌نماید. در قانون پیوستگی (مربوط به معادله ۱ - ۳)، شار مرتبط با مشتق فضایی معادله، شامل مدول مصالح است. تابع و شار قطعاً در مسائل مختلف معانی متفاوتی خواهند داشت. به عنوان مثال‌هایی خارج از مکانیک سازه می‌توان به انتقال حرارت، جریان سیال ایده‌آل، الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک اشاره کرد. قانون پایستگی^۱ (مربوط به شرایط تعادل در معادله ۱ - ۲) باعث می‌شود که شبکه شار جزء بسیار کوچک صفر باشد. این شار در جوه این جزء کوچک حضور داشته و می‌تواند به وسیله یک منبع (مربوط به بار) تولید شود.

خواننده‌ای که به مباحث مکانیک سازه تسلط ندارد باید معادله‌های مثال بیان‌شده را بر مبنای تخصص خود بازنویسی کند. این کار اجازه می‌دهد که تمامی نتایج در این فصل بررسی شده و در فصل ۱ از مکانیک سازه‌ای به‌گرایش‌های دیگر تعبیر و ترجمه شود. گسترش مباحث از استاتیک به دینامیک، به گونه‌ای که تمامی متغیرها به‌توابعی از زمان t تبدیل شوند، به شکل زیر است. تنها اصلاح، گنجاندن بار اینرسی در رابطه‌سازی تعادل جزء کوچک است. بخش حاصل ضرب جرم در شتاب، که در امتداد منفی عمل می‌کند، $(-\rho dx dy \ddot{u}(t))$ در معادله (۱ - ۲) اضافه شده که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\tau_{x,x}(t) + \tau_{y,y}(t) + p(t) - \rho \ddot{u}(t) = 0 \quad (9 - 1)$$

که در آن ρ چگالی جرم است. جایگذاری قانون پیوستگی مشابه معادله (۱ - ۳)، معادله دیفرانسیل حرکت را به صورت زیر به دست می‌دهد:

$$G(u_{,xx}(t) + u_{,yy}(t)) - \rho \ddot{u}(t) + p(t) = 0 \quad (10 - 1)$$

که همچنین می‌تواند به شکل معادله موج اسکالر (دوبعدی) نوشته شود:

$$u_{,xx}(t) + u_{,yy}(t) - \frac{1}{c_s^2} \ddot{u}(t) + \frac{p(t)}{G} = 0 \quad (11 - 1)$$

1. Conservation law

که در آن سرعت موج برشی به صورت زیر بیان می شود:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (12-1)$$

مسئله شامل حل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر رابطه ۱ - ۱۰ است که تحت شرایط مرزی مشابه معادله ۱ - ۵ با معادله ۱ - ۸ (در حالت کلی وابسته به زمان) و اعمال شرایط اولیه در تمام حوزه است.

$$u(t=0) = \bar{u}_0 \quad (13-1 \text{ الف})$$

$$\dot{u}(t=0) = \bar{\dot{u}}_0 \quad (13-1 \text{ ب})$$

۱-۳ روش باقیمانده‌های وزنی^۱

شکل مرز S ، شرایط مرزی بر S_u و S_t و بار p (شکل ۱ - ۲) در بسیاری از مسائل کاربردی مانع از استفاده تکنیک‌های ریاضی کلاسیک برای حل مسئله مقدار مرزی (معادلات ۱ - ۴ و ۱ - ۵) شده و بنابراین مانع از امکان حل تحلیلی دقیق می شود. این موضوع حتی بر شرایط مثال ساده گوه (شکل ۱ - ۳) نیز حاکم است. از آنجا که معادله دیفرانسیل حاکم می بایست در تمامی نقاط حوزه برقرار بوده و همچنین شرایط مرزی نیز می باید در تمام نقاط مرزی برقرار باشد، حل دقیق پیوسته برای تابع u (جابه جایی) به تعداد نامحدودی مجهول (درجات آزادی) مرتبط می شود. برای دستیابی به حل عددی تقریبی، این درجات آزادی نامحدود، حل پیوسته به تعداد محدود n حل مجزا کاهش یافته و حل تقریبی برای u به شکل زیر رابطه سازی شده است:

$$u(x, y) = \alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y) + \dots = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x, y) \quad (14-1)$$

که در این معادله، α_i ها ضرایب مجهول و φ_i ها یک سری توابع مستقل خطی معلوم هستند. گاهی در روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی، α_i ها مربوط به مقادیر گرهی تابع u یا مشتق فضایی آن (شار عمودی) هستند. در این حالت φ_i ها توابع درونی فرض شده که آنها را توابع شکل^۲ می نامند. در بسیاری حالات توابع چند جمله‌ای در سیستم مختصات

1. Weighted residuals
2. Shape functions

۱. مبانی تحلیل عددی ۹

محلی به عنوان توابع شکل استفاده می‌شوند (همچنین به پیوست الف مراجعه شود).
 از آنجا که معادله ۱ - ۱۴ به طور کلی بیانگر حل دقیق نیست، جایگذاری در معادله
 دیفرانسیل حاکم (معادله ۱ - ۴) به خطا یا تابع باقیمانده $R = R(x, y)$ منجر می‌شود.

$$R = G(u_{,xx} + u_{,yy}) + p = G \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (\varphi_{i,xx} + \varphi_{i,yy}) \right) + p \neq 0 \text{ in } V \quad (15 - 1)$$

به طور مشابه شرایط مرزی (معادلات ۱ - ۵ با معادله ۱ - ۸) نیز ارضا نشده و منجر به توابع
 باقیمانده^۱ بر روی مرز می‌شوند.

$$R_1 = u - \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i - \bar{u} \neq 0 \text{ on } S_u \quad (\text{الف} - 16 - 1)$$

$$R_2 = \tau_n - \bar{\tau}_n = G \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{i,n} - \bar{\tau}_n \neq 0 \text{ on } S_t \quad (\text{ب} - 16 - 1)$$

توابع وزنی روی حوزه و مرز با استفاده از روش‌های عددی متفاوتی تا حد امکان کوچک
 خواهند شد. برای این کار، باقیمانده‌ها به شکل خاصی توزیع می‌شوند که روش‌های تقریبی
 متفاوتی را ایجاد می‌کند. باقیمانده‌های ضرب شده در یک تابع خاص که تابع وزن نامیده
 می‌شود، بر روی حوزه یا مرز انتگرال‌گیری شده مساوی با صفر قرار داده می‌شوند. این عمل
 به نام «روش باقیمانده‌های وزنی» نامیده می‌شود.

زمانی که حل تقریبی فرضی (معادله ۱ - ۱۴) معادله دیفرانسیل حاکم (معادله ۱ - ۴)
 را با رسیدن به $R = 0$ (معادله ۱ - ۱۵) ارضا می‌کند، اما شرایط مرزی (معادله ۱ - ۵) را با
 رسیدن به $R_1 \neq 0$ و $R_2 \neq 0$ (معادله ۱ - ۱۶) ارضا نمی‌کند، تنها انتگرال باقیمانده‌های
 ضرب شده در تابع وزنی بر مرز رخ می‌دهند که در این شرایط «روش مرزی» نتیجه
 می‌شود. زمانی که حل تقریبی، شرایط مرزی را ارضا کرده (با تحقق $R_1 = R_2 = 0$) اما
 معادله دیفرانسیل حاکم را ارضا نمی‌کند ($R \neq 0$)، تنها انتگرال باقیمانده‌های ضرب شده
 در تابع وزنی بر روی حوزه حاصل می‌شود که منجر به «روش حوزه» می‌گردد.

رابطه‌سازی باقیمانده وزنی برای روش حوزه آورده شده است. بنابراین توابع φ_i دقیقاً
 شرایط مرزی را ارضا می‌کنند (معادله ۱ - ۵). تابع وزنی w به صورت زیر تعریف شده است:

$$w(x, y) = \beta_1 \psi_1(x, y) + \beta_2 \psi_2(x, y) + \dots = \sum_{j=1}^n \beta_j \psi_j(x, y) \quad (17 - 1)$$

که در آن β_j ها ضرایب و ψ_j ها یک سری توابع مستقل خطی معلوم هستند. باقیمانده R در رابطه دیفرانسیل حاکم (رابطه ۱ - ۱۵) ضرب شده در w بر روی حوزه V انتگرال گیری شده و برابر صفر قرار داده شده است.

$$\int_V R w dV = 0 \quad (۱۸ - ۱)$$

در شرایط دوبعدی، $dV = dx dy$ برقرار است. با اختیاری بودن β_j ها، معادله ۱ - ۱۸ به یک سیستم معادلات منجر می شود:

$$\int R \psi_j dV = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (۱۹ - ۱)$$

جایگذاری معادله ۱ - ۱۵ در معادله ۱ - ۱۹ به رابطه زیر می انجامد:

$$\int \left(G \sum_{i=1}^n \alpha_i (\varphi_{i,xx} + \varphi_{i,yy}) + p \right) \psi_j dV = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (۲۰ - ۱)$$

این رابطه بیانگر یک سیستم با n معادله برای تعیین n ضریب مجهول α_i است. بنابراین حل عددی معادله دیفرانسیل در یک تابع پیوسته مجهول (معادله ۱ - ۴)، منجر به سیستمی از معادلات جبری (۱ - ۲۰) به شکل ضرایب معرف حل تقریبی (معادله ۱ - ۱۴) می شود.

رابطه سازی باقیمانده های وزنی، اساس معمول را برای تمام روش های عددی بنیادی فراهم می کند که به طور خاص برای روش های اجزای مرزی و اجزای محدود است. این فرمول بندی همچنین این امکان را فراهم می کند که پیوستگی لازم توابع به کار رفته در رسیدن به حل تقریبی و تابع وزنی، مشخص شوند. با شروع از رابطه سازی باقیمانده های وزنی در روش حوزه، دستیابی به معادله باقیمانده های وزنی برای حالتی که شرایط مرزی به طور دقیق با حل تقریبی ارضا نشده اند، امکان پذیر بوده و تقریب به کار رفته می تواند به طور مشخص تعیین شود.

این مشتق گیری به صورت زیر انجام می شود. رابطه سازی باقیمانده های وزنی در روش

حوزه با حوزه V و مرز S (شکل ۱ - ۴) با (معادله ۱ - ۱۸) بیان می شود:

$$\iint (G(u_{,xx} + u_{,yy}) + p) w dx dy = 0 \quad (۲۱ - ۱)$$

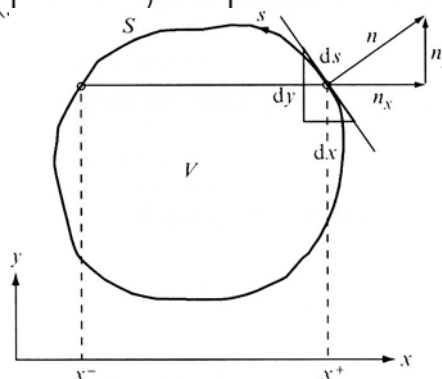
عبارت های حاوی مشتق به صورت زیر، جزء به جزء انتگرال گیری شده اند. اولین بخش در

۱. مبانی تحلیل عددی ۱۱

سمت راست رابطه بخش به بخش در امتداد x انتگرال گیری شده است:

$$\begin{aligned} \iint (u_{,xx} + u_{,yy})w dx dy &= \iint (u_{,x}w)_{,x} dx dy - \iint u_{,x}w_{,x} dx dy \\ &+ \iint (u_{,y}w)_{,y} dx dy - \iint u_{,y}w_{,y} dx dy \end{aligned} \quad (22-1)$$

$$\int \left(\int (u_{,x}w)_{,x} dx \right) dy = \int ((u_{,x}w)^+ - (u_{,x}w)^-) dy \quad (23-1)$$



شکل ۱-۴ انتگرال در خلاف جهت عقربه های ساعت بر روی مرز و با حوزه V در سمت چپ و بردار عمود رو به بیرون

که علامت های $+$ و $-$ مشخص کننده محورهای x^+ و x^- بر روی مرز هستند. به طور مشابه بخش سوم به صورت زیر فرمول بندی شده:

$$\int \left(\int (u_{,y}w)_{,y} dy \right) dx = \int ((u_{,y}w)^+ - (u_{,y}w)^-) dx \quad (24-1)$$

انتگرال گیری خلاف جهت عقربه های ساعت در مسیر S با حوزه V در چپ، با بردار عمود $\{n\}$ رو به بیرون با مؤلفه های n_x و n_y و جایگذاری $dx = n_y ds$ و $dy = n_x ds$ (شکل ۱-۴) در رابطه های ۱-۲۳ و ۱-۲۴ به رابطه های زیر منجر می شود:

$$\iint (u_{,x}w)_{,x} dx dy + \iint (u_{,y}w)_{,y} dx dy = \int (u_{,x}n_x + u_{,y}n_y) w ds = \int u_{,n} w ds \quad (25-1)$$

با جایگذاری معادله ۱-۲۵ در رابطه ۱-۲۲ فرمول انتگرال جزء به جزء زیر به دست خواهد آمد:

$$\iint (u_{,xx} + u_{,yy})w dx dy = \int u_{,n}w ds - \iint (u_{,x}w_{,x} + u_{,y}w_{,y}) dx dy \quad (26 - 1)$$

با قرار دادن بخش دوم در سمت راست در بخش انتگرالی روابط زیر به دست می آیند:

$$\iint u_{,x}w_{,x} dx dy = \iint (uw_{,x})_{,x} dx dy - \iint uw_{,xx} dx dy \quad (27 - 1)$$

$$\int \left(\int (uw_{,x})_{,x} dx \right) dy = \int ((uw_{,x})^+ - (uw_{,x})^-) dy = \int uw_{,x}n_x ds \quad (28 - 1)$$

و به طور مشابه:

$$\iint u_{,y}w_{,y} dx dy = \int uw_{,y}n_y ds - \iint uw_{,yy} dx dy \quad (29 - 1)$$

$$\iint (u_{,x}w_{,x} + u_{,y}w_{,y}) dx dy = \int uw_{,n} ds - \iint u(w_{,xx} + w_{,yy}) dx dy \quad (30 - 1)$$

قرار دادن معادله ۱ - ۳۰ در معادله ۱ - ۲۶ «قضیه گرین» را نتیجه می دهد.

$$\iint (u_{,xx} + u_{,yy})w dx dy = \int (w_{,xx} + w_{,yy})u dx dy + \int u_{,n}w ds - \int uw_{,n} ds \quad (31 - 1)$$

بیان این عبارت تا حدودی اصلاح شده است. انتگرال گیری ها بر روی حوزه V رخ داده، انتگرال گیری روی مرز S به S_u با جایگزینی $u = \bar{u}$ و S_t با $\tau_n = Gu_{,n} = \bar{\tau}_n$ (معادلات ۱ - ۵ و ۱ - ۸) تجزیه می شود. با جایگذاری معادله ۱ - ۳۱ در معادله ۱ - ۲۱ خواهیم داشت:

$$G \int_V (w_{,xx} + w_{,yy})u dV + \int_V p w dV = G \int_S u w_{,n} dS - \int_S G u_{,n} w dS \quad (32 - 1)$$

با اعمال شرایط مرزی معرفی شده و با استفاده از معادله ۱ - ۸ نتیجه می شود:

$$G \int_V (w_{,xx} + w_{,yy})u dV + \int_V p w dV = G \int_{S_u} \bar{u} w_{,n} dS + G \int_{S_t} u w_{,n} dS - \int_{S_u} \tau_n w dS - \int_{S_t} \bar{\tau}_n w dS \quad (33 - 1)$$

اشاره می شود که با قرار دادن u به جای \bar{u} در S_u و τ_n به جای $\bar{\tau}_n$ در S_t ، یک اصلاح در علائم صورت می گیرد.

برای بازیابی باقیمانده وزنی اصلی، انتگرال گیری جزء به جزء دو بار به عقب انجام

۱. مبانی تحلیل عددی ۱۳

می‌شود. جایگذاری قسمت آخر در رابطه ۱ - ۳۰ در رابطه ۱ - ۳۳ به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$G \int_V (u_{,x} w_{,x} + u_{,y} w_{,y}) dV - \int_V p w dV = G \int_{S_u} (u - \bar{u}) w_{,n} dS + \int_{S_u} \tau_n w dS + \int_{S_t} \bar{\tau}_n w dS \quad (۱ - ۳۴)$$

با جایگذاری قسمت آخر معادله ۱ - ۲۶ در معادله ۱ - ۳۴ خواهیم داشت:

$$G \int_V (u_{,xx} + u_{,yy}) w dV + \int_V p w dV = -G \int_{S_u} (u - \bar{u}) w_{,n} dS + \int_{S_t} (\tau_n - \bar{\tau}_n) w dS \quad (۱ - ۳۵)$$

معرفی توابع باقیمانده (معادلات ۱ - ۱۵ و ۱ - ۱۶) به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\int_V R w dV + G \int_{S_u} R_1 w_{,n} dS - \int_{S_t} R_2 w dS = 0 \quad (۱ - ۳۶)$$

بنابراین معرفی شرایط مرزی توصیف شده قبلی در معادله ۱ - ۳۳ منجر به رابطه‌سازی وزن‌های باقیمانده کلی با توابع باقیمانده در معادله دیفرانسیل در حوزه، با شرایط مرزی جابه‌جایی‌ها و شرایط کشش سطحی بر مرز می‌شود. با وجود اینکه در معادله ۱ - ۳۳، $u = \bar{u}$ بر S_u و $\tau_n = \bar{\tau}_n$ بر S_t اعمال شده‌اند، توابع باقیمانده (خطا) بر روی مرز همچنان وجود دارند ($R_1 \neq 0$ و $R_2 \neq 0$ در معادله ۱ - ۳۶). اجزای حل تقریبی u مرتبط با شرایط مرزی در معادله ۱ - ۳۵ وجود دارند و لازم نیست u شرایط مرزی در فرمول‌بندی باقیمانده‌های وزنی را ارضا نماید.

رابطه باقیمانده‌های وزنی متناظر رابطه ۱ - ۳۵ می‌تواند برای هر مسئله مقدار مرزی تشکیل شود. در مکانیک سازه، رابطه ۱ - ۳۴ می‌تواند با انتخاب $u = \bar{u}$ بر S_u به‌عنوان بیان کار مجازی تفسیر شود. تابع وزنی بیانگر جابه‌جایی مجازی بوده و لازم نیست شرط مرزی خاصی را ارضا نماید. برای جابه‌جایی مجازی، بخش اول برابر است با کار داخلی (انرژی کرنشی ارتجاعی)، بخش دوم با کار خارجی بار و عبارت سمت راست با کار خارجی مرزی (حاصل ضرب کشش‌های سطحی مجهول در جابه‌جایی مجازی) برابر است.

سه رابطه کلیدی باقیمانده‌های وزنی در معادلات ۱ - ۳۵، ۱ - ۳۴ و ۱ - ۳۳ اطلاعاتی در مورد الزامات پیوستگی توابع نیز فراهم می‌کند. در معادلات ۱ - ۳۳ و ۱ - ۳۵ پیوستگی

تا مشتق دوم، یعنی حداقل تا قسمت درجه دوم چندجمله‌ای و در معادله ۱ - ۳۴ پیوستگی تا مشتق اول، یعنی تا بخش خطی کافی و مورد قبول است، بنابراین الزامات پیوستگی 'ضعیف' شده است. وضعیت باقیمانده‌های وزنی معادله ۱ - ۳۴ که تقریبی است، فرم ضعیف نامیده می‌شود (معادله دیفرانسیل حاکم، معادله ۱ - ۴، فرم قوی نامیده می‌شود).

در بند ۱ - ۴ نشان داده می‌شود که رابطه‌سازی باقیمانده‌های وزنی در معادله ۱ - ۳۴ نقطه شروع روش اجزای محدود است. به‌ویژه برای تابع وزنی w ، تابعی مشابه تابع u ، ولی کاهشده بر $S_{II}(w=0)$ انتخاب شده است. تابع تقریب u به‌گونه‌ای انتخاب شده تا شرط مرزی جابه‌جایی بر $S_{II}(u=\bar{u})$ را برقرار نماید که این انتخاب نتیجه زیر را می‌دهد:

$$G \int_V (u_{,x}w_{,x} + u_{,y}w_{,y})dV = \int_V p w dV + \int_{S_t} \bar{t}_n w dS \quad (۳۷ - ۱)$$

در بند ۱ - ۵ نشان داده می‌شود که فرمول‌بندی باقیمانده‌های وزنی در معادله ۱ - ۳۳، اساس روش اجزای مرزی را شکل می‌دهد. تابع وزنی w به‌صورتی انتخاب شده که اولین انتگرال، تنها بخش واقع بر مرز را نتیجه می‌دهد که منجر به معادله انتگرال - مرزی می‌گردد. بنابراین، به‌جز قسمت معرف بار p ، سایر انتگرال‌های روی مرز رخ می‌دهند. بسط فرمول‌بندی باقیمانده‌های وزنی از شرایط استاتیکی به‌دینامیکی آسان است. به‌این منظور عبارت اینرسی $-\rho \ddot{u}(t)$ موجود در معادله دیفرانسیل حرکت (معادله ۱ - ۱۰)، در تابع وزنی w ضرب شده و به‌سایر عبارات اضافه می‌شود. به‌عنوان مثال، معادله ۱ - ۳۷ در شرایط دینامیکی به‌شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$G \int_V (u_{,x}w_{,x} + u_{,y}w_{,y})dV + \rho \int_V \ddot{u} w dV = \int_V p w dV + \int_{S_t} \bar{t}_n w dS \quad (۳۸ - ۱)$$

۱ - ۴ روش اجزای محدود

ویژگی‌های اصلی روش اجزای محدود می‌تواند به‌شرح زیر خلاصه شود. حوزه به‌زیر حوزه‌های بدون هم‌پوشانی که اجزای محدود نامیده می‌شوند، تقسیم می‌شود. برای هر جزء محدود، حل ساده‌ی تقریبی که بیانگر رفتار فیزیکی است، تعیین می‌شود. سپس اجزای یادشده به یکدیگر متصل (سرهم) می‌شوند تا مدل کامل مسئله را که می‌تواند حل شود،

۱. مبانی تحلیل عددی ۱۵

شکل دهند. این سه عمل به شدت به هم مرتبط هستند. بنابراین روش اجزای محدود تنها بر مفهوم «تقسیم کن و غلبه کن» استوار نیست، بلکه می‌توان با نقل قولی از گوته (۱۷۴۹ - ۱۸۳۲) آن را توصیف کرد: «تقسیم کن و دستور بده، یک پند هوشمندانه است؛ متحد کن و هدایت کن، از آن هم بهتر است».

گام‌های اصلی روش اجزای محدود با بیان مثالی از معادله لاپلاس که در بند ۱ - ۲ ارائه شده، تشریح می‌گردد. تابع مورد نظر با جابه‌جایی خارج از صفحه u برابر است و شار با تنش‌های برشی τ_x و τ_y متناظر است. مسئله مقدار مرزی شامل حل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم در رابطه ۱ - ۴ می‌باشد که بر شرایط مرزی بر مبنای جابه‌جایی در معادله ۱ - ۵ الف و بر مبنای تنش سطحی در معادله ۱ - ۵ ب اعمال شده است. مسئله خاص، گوه‌ای به شکل مثلث است که در شکل ۱ - ۳ نشان داده شده است. برای تشریح شرایط تعادل مسئله، شش گام زیر می‌تواند تعریف شود.

گام اول: جداسازی فضایی حوزه

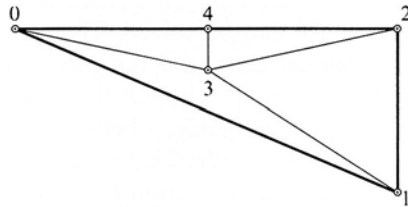
حوزه به تعدادی زیرحوزه تقسیم می‌شود که هم‌پوشانی ندارند، هر کدام هندسه ساده‌ای داشته و اجزای محدود نامیده می‌شوند. به هر جزء محدود، گره‌هایی با مختصات کلی اختصاص می‌یابد. هندسه جزء محدود می‌تواند از طریق درون‌یابی مقادیر گره‌ای آن با توابع نگاشت^۱ توصیف شود. این شرایط که مدل‌سازی یکپارچه^۲ نامیده می‌شود، در پیوست الف مورد بررسی قرار گرفته و در گام دوم بیشتر توصیف شده است.

گوه^۳ ۱ - ۲ - ۰ (شکل ۱ - ۵) به چهار مثلث که گره‌های آنها در رئوس هستند، تقسیم شده است. مختصات گره‌ها، در بند ۱ - ۲ مشخص شده‌اند و گره ۳ بر نقطه P در شکل ۱ - ۳ منطبق است.

گام دوم: جابه‌جایی درون اجزای محدود

حل تقریبی جابه‌جایی‌ها در هر جزء محدود، به صورت تکه‌ای^۳ تعریف می‌شود. جابه‌جایی‌های

1. Mapping function
2. Solid modeling
3. Piecewise



شکل ۱-۵ تقسیم گوه به چهار جزء محدود مثلثی که گره‌های آنها در رئوس قرار دارد.

گره‌ای به‌عنوان مجهول انتخاب شده‌اند. جابه‌جایی درون هر جزء محدود منفرد، برحسب مقادیر گره‌ای از طریق توابع شکل، در سیستم مختصات محلی درون‌یابی می‌شود. چندجمله‌ای‌ها تناسب خوبی دارند زیرا مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری به‌سادگی انجام می‌شوند. درجه هر چندجمله‌ای، با تعداد گره‌های جزء محدود و الزامات پیوستگی جابه‌جایی‌ها در طول وجوه مطابقت دارد. در اکثر حالات برای توابع نگاشت توصیف‌کننده هندسه و توابع شکل تعیین‌کننده جابه‌جایی، توابع درون‌یاب مشابهی انتخاب می‌شود.

برای هر مثلث، یک جابه‌جایی متغیر خطی به‌عنوان تقریب اولیه فرض می‌شود

(معادله ۱ - ۱۴):

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (۳۹ - ۱)$$

که در آن α_1 ، α_2 و α_3 سه ضریب مجهول هستند. برای تعیین این سه ضریب، جابه‌جایی‌ها در سه گره مورد نیاز است که منجر به انتخاب گره‌های رئوس ۱، ۲ و ۳ در شکل ۱ - ۶ می‌شود. (این یک نام‌گذاری محلی است که برای هر جزء محدود قابل کاربرد است). رابطه‌سازی زیر:

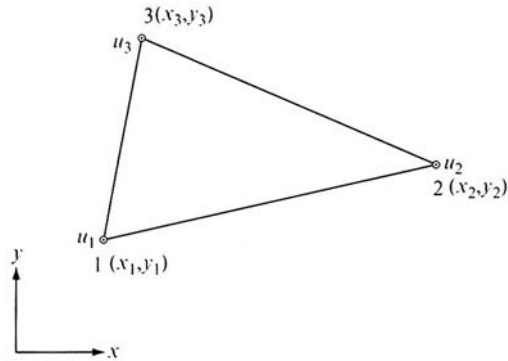
$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1, y_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 &= u(x_2, y_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 &= u(x_3, y_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{aligned} \quad (۴۰ - ۱)$$

و حل این معادلات ضرایب مجهول را تابعی از جابه‌جایی‌ها و مختصات گره‌ها به‌دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) u_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) u_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) u_3] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} [(y_2 - y_3) u_1 + (y_3 - y_1) u_2 + (y_1 - y_2) u_3] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} [(x_3 - x_2) u_1 + (x_1 - x_3) u_2 + (x_2 - x_1) u_3] \end{aligned} \quad (۴۱ - ۱)$$

که در آن Δ مساحت مثلث است.

۱. مبانی تحلیل عددی ۱۷



شکل ۱-۶ جزء محدود مثلثی که گره‌های آن در رئوس قرار دارد.

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_1y_2 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1) \quad (۴۲ - ۱)$$

با جایگذاری معادله ۱-۴۱ در رابطه ۱-۳۹ خواهیم داشت:

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 \quad (۴۳ - ۱)$$

که در آن توابع شکل به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (۴۴ - ۱) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned}$$

توجه شود که برای $j = i$ ، $N_i(x_i, y_i) = 1$ و برای $j \neq i$ ، $N_i(x_j, y_j) = 0$ است.

درون‌یابی گره‌ای در معادله ۱-۴۳ می‌تواند به صورت زیر نیز بیان شود:

$$u(x, y) = [N(x, y)]\{u\} \quad (۴۵ - ۱)$$

که در آن جابه‌جایی‌های گره‌ای به شکل زیر است:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (۴۶ - الف)$$

$$[N(x, y)] = [N_1(x, y), N_2(x, y), N_3(x, y)] \quad (۱ - ۴۶ - ب)$$

لازم به تأکید است که توابع شکل خطی هستند. در طول وجه مشخصی از یک جزء محدود، تابع خطی جابه‌جایی به‌وسیله دو جابه‌جایی گره‌ای تعیین می‌شود. از آنجا که جزء محدود مجاور با وجه مشترک، همان دو گره را با مقادیر گره‌ای یکسان به‌اشتراک دارد، جابه‌جایی‌های محاسبه‌شده در دو جزء در طول آن وجه مشترک برابر بوده و بنابراین، جابه‌جایی در سراسر وجه پیوسته خواهد بود. با حل تقریبی گوه، توابع شکل اجزای محدود مجاور به‌سادگی سرهم‌بندی شده و هرم‌های محلی را شکل می‌دهند. برای مثال، توابع شکل کلی متناظر با گره ۲ در شکل ۱ - ۵ به‌صورت جزئی با فاصله کاهش می‌یابد. فاصله از این گره تا وجوه مقابل ۳ - ۴ و ۳ - ۱ است که به‌ترتیب با اجزای محدود ۲ - ۴ - ۳ و ۲ - ۳ - ۱ مشترک در گره ۲ متناظر هستند. صرف‌نظر از شرایط مرزی، جابه‌جایی تخمینی خطی به‌صورت تکه‌ای بر هر جزء محدود، تابعی از جابه‌جایی گره‌های صفر تا ۴ است. همان‌طور که اشاره شد، جابه‌جایی تخمینی در سراسر وجه اجزای محدود پیوسته بوده و هیچ فاصله جابه‌جایی در سراسر گوه رخ نمی‌دهد.

در گام اول، اجزای محدود مثلثی انتخاب می‌شوند که در آن مختصات در طول یک وجه، توابع خطی از مختصات گره‌های در دو رأس واقع در انتهای وجه هستند. این درون‌یابی مشابه با درون‌یابی جابه‌جایی است، بنابراین تناظری طبیعی وجود دارد. درون‌یابی مشابه توصیف‌شده، در معادله ۱ - ۴۵ برای جابه‌جایی، برای مختصات یک جزء محدود منفرد نیز اعمال خواهد شد.

$$\begin{aligned} x &= [N(x, y)]\{x\} \\ y &= [N(x, y)]\{y\} \end{aligned} \quad (۱ - ۴۷)$$

که مختصات گره‌ای به‌صورت زیر می‌باشند (شکل ۱ - ۶):

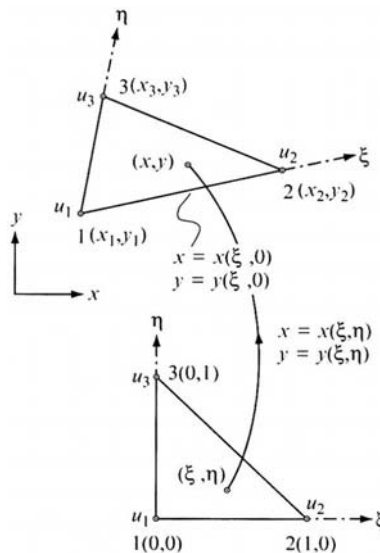
$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (۱ - ۴۸)$$

و همچنین معادلات نگاشت $[N(x, y)]$ که در معادلات ۱ - ۴۶ - ب و ۱ - ۴۴ مشخص شدند.

در این مثال ساده، توابع شکل در رابطه ۱ - ۴۴ در سیستم مختصات کارتیزین کلی و نه در سیستمی محلی مرتبط با جزء محدود، توصیف شده‌اند. به منظور آمادگی برای بسط مسئله مدل بخش ۱، یک سیستم مختصات محلی ξ, η که در جزء اولیه تعریف شده بود، معرفی می‌شود که تکمیل آن به جزء محدود عمومی می‌انجامد. روند به کار رفته برای مثلث، برای چهارضلعی بررسی شده در پیوست الف نیز مشابه است.

مثلث کلی با مختصات عمومی گره‌های رئوس، در قسمت بالای شکل ۱ - ۷ نشان داده شده است. مثلث اصلی با یک زاویه قائم و دو ضلع با اندازه واحد (مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین) و مختصات محلی ξ, η که به طور مناسب مقیاس شده‌اند در قسمت پایین قرار دارند. نقطه ξ, η در جزء با پارامترهای ξ, η در نقطه x, y در مثلث عمومی نگاشته می‌شود. به عنوان مثال، ضلع ۱ - ۲ از جزء اصلی ($0 \leq \xi \leq 1, \eta = 0$) با همان مقادیر ξ, η در ضلع مایل ۱ - ۲ از مثلث عمومی نگاشته می‌شود. بررسی‌ها توابع نگاشت را برای سه گروه تعریف شده در جزء اصلی به صورت زیر به دست می‌دهند.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (49 - 1)$$



شکل ۱ - ۷ تولید جزء محدود مثلثی کلی با استفاده از نگاشت جزء منشأ به شکل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

در مختصات محلی $i = 1, 2, 3$ و (x_i, y_i) با وارد کردن مختصات کلی گره‌ای به ترتیب زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= [N(\xi, \eta)]\{x\} \\ y(\xi, \eta) &= [N(\xi, \eta)]\{y\} \end{aligned} \quad (50 - 1)$$

که مختصات گره‌ای در رابطه ۱ - ۴۸ آورده شده:

$$[N(\xi, \eta)] = [1 - \xi - \eta, \xi, \eta] \quad (51 - 1)$$

برای این تبدیل خطی، نگاشت معکوس به سادگی ساخته می‌شود. با جایگذاری رابطه ۱ - ۵۱ در رابطه ۱ - ۵۰ و حل آن برای ξ, η ، هر دو متغیر بر حسب x و y نتیجه می‌شوند. با ادامه این روند و جایگذاری روابط در معادله ۱ - ۵۰، روابط نگاشت معادله ۱ - ۴۷ در مختصات کلی به دست می‌آید.

به طور مشابه، جابه‌جایی جزء محدود می‌تواند به شکل زیر بیان شود:

$$u(\xi, \eta) = [N(\xi, \eta)]\{u\} \quad (52 - 1)$$

که توابع شکل در معادله ۱ - ۴۹ مشخص شده‌اند.

گام سوم: مشخصات اجزای محدود (سختی استاتیکی و بار گره‌ای)

مشخصات هر جزء محدود بر اساس روابط باقیمانده‌های وزنی تعیین شده است. با اینکه یک جزء محدود دارای تعداد نامتناهی نقاط اتصال با اجزای مجاور بر روی وجوه خواهد بود، ولی بیانی مجزا و مرتبط با مقادیر گره‌ای برای این مشخصات مورد نیاز است. در شرایط استاتیکی، ماتریس سختی استاتیکی که جابه‌جایی‌های گره‌ای را با نیروهای متمرکز همان گره مرتبط می‌سازد، به دست می‌آید. برای بار گسترده که بر یک جزء محدود اعمال شده و برای کشش سطحی، یک بردار بار گره‌ای نیز محاسبه می‌شود. با داشتن این دو مشخصات، رابطه نیروی گره‌ای - جابه‌جایی گره‌ای را برای هر جزء محدود منفرد می‌توان به دست آورد. با انتخاب الزامی توابع شکل مشابه برای تابع وزنی مانند جابه‌جایی تخمینی، روابط مقارنی به دست می‌آید، به ویژه ماتریس سختی استاتیکی مقارن است.

همان طور که در انتهای بند ۱ - ۳ اشاره شد، فرم ضعیف روش باقیمانده‌های وزنی،

۱. مبانی تحلیل عددی ۲۱

نقطه شروع مشتق‌گیری روش اجزای محدود است. در معادله ۱ - ۳۷ جابه‌جایی تخمینی u جابه‌جایی \bar{u} بر روی $S_u(u = \bar{u})$ را ارضا می‌کند و تابع وزنی w بر روی $S_u(w = 0)$ به صفر می‌رسد. بیان کار مجازی در این شرایط برای سهولت ارجاع، تکرار می‌شود.

$$G \int_V (u_{,x} w_{,x} + u_{,y} w_{,y}) dV = \int_V p w dV + \int_{S_t} \bar{t}_n w dS \quad (۵۳ - ۱)$$

از آنجا که جابه‌جایی انتخاب شده u یک تابع خطی است، $u_{,x}$ و $u_{,y}$ در هر جزء ثابت هستند. در طول مرزهای درون جزئی (اضلاع اجزای محدود)، u پیوسته بوده اما مشتقات جزئی u توابع گام هستند. از آنجا که w تابعی مشابه با u است، مشخصات یکسانی برای تابع وزن نیز اعمال می‌شود. بنابراین، حاصل ضرب مشتقات جزئی u و w ارائه شده در رابطه ۱ - ۵۳، وجود داشته و بر روی هر جزء منفرد، قابلیت انتگرال‌گیری مربعی دارند.

انتگرال‌های معادله ۱ - ۵۳ بر کل حوزه اعمال می‌شوند. این انتگرال‌گیری همچنین می‌تواند متناسب با سهم جزء محدود منفرد تجزیه شده و سپس با هم جمع شوند. به منظور ساده‌سازی اصطلاحات، برای کمیت‌های متناظر با جزء محدود منفرد و کمیت‌های متناظر با حوزه کل شامل سرهم‌بندی تمامی اجزای محدود، علامت‌های مشابهی استفاده می‌شود. در ادامه یک جزء محدود منفرد بررسی می‌شود.

ماتریس سختی/استاتیکی مثلث شکل ۱ - ۶ و توابع شکل مشخص شده در مختصات کلی (معادله ۱ - ۴۵) محاسبه شده است. سمت چپ معادله ۱ - ۵۳ برای مثلث به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$G \int (w_{,x}^T u_{,x} + w_{,y}^T u_{,y}) dx dy \quad (۵۴ - ۱)$$

بر اساس معادله ۱ - ۴۵ داریم:

$$\begin{aligned} u_{,x} &= [N_{,x}] \{u\} \\ u_{,y} &= [N_{,y}] \{u\} \end{aligned} \quad (۵۵ - ۱)$$

با معادله (۱ - ۴۴) به صورت زیر دنبال می‌شود:

$$\begin{aligned} [N_{,x}] &= \frac{1}{2\Delta} [y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2] \\ [N_{,y}] &= \frac{1}{2\Delta} [x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1] \end{aligned} \quad (۵۶ - ۱)$$

۲۲ روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده

تابع وزنی به صورت زیر بیان می شود:

$$w = [N(x, y)]\{w\} = [N]\{w\} \quad (۵۷ - ۱)$$

توابع وزنی در گره‌ها به شکل زیر می باشند:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (۵۸ - ۱)$$

در نتیجه بیان مشابهی به دست می آید. با جایگذاری در معادله (۱ - ۵۴) رابطه زیر به دست می آید:

$$\{w\}^T G \int ([N_{,x}]^T [N_{,x}] + [N_{,y}]^T [N_{,y}]) dx dy \{u\} \quad (۵۹ - ۱)$$

از آنجا که $\{w\}^T$ اختیاری است، بردار باقیمانده بیانگر بار گره‌ای $\{P\}$ در معادله ۱ - ۵۹ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\{P\} = G \int ([N_{,x}]^T [N_{,x}] + [N_{,y}]^T [N_{,y}]) dx dy \{u\} \quad (۶۰ - ۱)$$

رابطه بار گره‌ای - جابه‌جایی گره‌ای برابر با بار به صفر رسیده زیر است:

$$\{P\} = [K]\{u\} \quad (۶۱ - ۱)$$

با مقایسه با رابطه (۱ - ۶۰) ماتریس سختی استاتیکی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$[K] = G \int ([N_{,x}]^T [N_{,x}] + [N_{,y}]^T [N_{,y}]) dx dy \quad (۶۲ - ۱)$$

جایگذاری رابطه (۱ - ۵۶) به رابطه زیر منجر می شود:

$$[K] = \frac{G}{4\Delta} ([K_y] + [K_x]) \quad (۶۳ - ۱)$$

که در آن

۱. مبانی تحلیل عددی ۲۳

$$[K_y] = \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix} \quad (۶۴ - ۱)$$

و $[K_x]$ از $[K_y]$ با جایگذاری x_i به جای y_i ساخته می‌شود. لازم به اشاره است که $[K]$ متقارن است.

ماتریس سختی استاتیکی همچنین می‌تواند براساس جزء منشأ و با مختصات محلی ξ, η (شکل ۱ - ۷) محاسبه شود. رابطه (۱ - ۵۴) همان‌طور که با مشتق‌های جزئی متناظر با مختصات کلی x, y بیان شده در رابطه (الف - ۷) (پیوست الف) برقرار است، با مشتقات جزئی متناظر با ξ, η نیز به صورت زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (۶۵ - ۱)$$

که در آن ژاکوبین به صورت زیر است (معادله الف - ۸):

$$|J| = x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi} \quad (۶۶ - ۱)$$

براساس رابطه‌های (۱ - ۵۰) و (۱ - ۵۱)، مشتق‌های جزئی برابرند با:

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= [N(\xi, \eta)_{,\xi}] \{x\} = -x_1 + x_2 \\ x_{,\eta} &= [N(\xi, \eta)_{,\eta}] \{x\} = -x_1 + x_3 \\ y_{,\xi} &= -y_1 + y_2 \\ y_{,\eta} &= -y_1 + y_3 \end{aligned} \quad (۶۷ - ۱)$$

این نتیجه حاصل می‌شود که $[J]$ در رابطه (۱ - ۶۶) با دو برابر مساحت مثلث، Δ ، (رابطه ۱ - ۴۲) برابر است.

جابه‌جایی u در یک جزء محدود در ξ, η در رابطه (۱ - ۵۲) مشخص شده است. مشتق‌های جزئی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N(\xi, \eta)_{,\xi}] \\ [N(\xi, \eta)_{,\eta}] \end{bmatrix} \{u\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{u\} \quad (۶۸ - ۱)$$

با بیان رابطه (۱ - ۶۵) برای جابه‌جایی u و جایگذاری رابطه (۱ - ۶۶) در (۱ - ۶۸)، ماتریس کرنش - جابه‌جایی گره‌ای $[B]$ را به دست می‌دهد که در آن $\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = u_{,y}$ بیانگر کرنش‌ها هستند.

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = [B]\{u\} \quad (۱ - ۶۹)$$

با تعریف

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & -y_1 + y_3 & y_1 - y_2 \\ -x_2 + x_3 & x_1 - x_3 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad (۱ - ۷۰)$$

و برای تابع وزنی

$$w(\xi, \eta) = [N(\xi, \eta)]\{w\} \quad (۱ - ۷۱)$$

بیانی مشابه برای مشتق‌ها دنبال می‌شود. در جزء بسیار کوچک عبارت $dx dy$ در مختصات ξ, η جزء منشأ، برابر است با (رابطه الف - ۹):

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (۱ - ۷۲)$$

جایگذاری رابطه (۱ - ۶۹) در (۱ - ۷۰) و همچنین جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۷۱) و (۱ - ۷۲) در رابطه (۱ - ۵۴) به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} & \{w\}^T G \int \left(\begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ -y_1 + y_3 \\ y_1 - y_2 \end{Bmatrix} [y_2 - y_3, -y_1 + y_3, y_1 - y_2] \right. \\ & \left. + \begin{Bmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{Bmatrix} [x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2] \right) \frac{1}{2\Delta} d\xi d\eta \{u\} \quad (۱ - ۷۳) \end{aligned}$$

پاسخ انتگرال بر روی جزء منشأ برابر با $\frac{1}{\rho}$ است (شکل ۱ - ۷). دوباره اشاره می‌شود که $\{w\}^T$ اختیاری بوده و بردار باقیمانده با حاصل ضرب ماتریس سختی استاتیکی $[K]$ و

۱. مبانی تحلیل عددی ۲۵

$\{u\}$ برابر است. این تعریف برای $[K]$ به نتیجه‌ای مشابه با نتیجه مشخص شده در رابطه (۶۳ - ۱) منجر می‌شود.

ماتریس سختی استاتیکی همچنین می‌تواند به صورت تابعی از ماتریس کرنش - جابه‌جایی گره‌ای $[B]$ (معادله ۱ - ۷۰) به شکل زیر نوشته شود:

$$[K] = \int [B]^T G [B] |J| d\xi d\eta \quad (۷۴ - ۱)$$

بررسی عبارت سمت راست رابطه (۱ - ۷۳)، بردار بار گره‌ای را نتیجه می‌دهد. برای تنش به صفر رسیده، ذکر شده در مثال، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int w^T p dx dy \quad (۷۵ - ۱)$$

برای بار p ثابت و با جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۷۱) و کاربرد رابطه (۱ - ۷۲) خواهیم داشت:

$$\{w\}^T p \int [N(\xi, \eta)]^T |J| d\xi d\eta = \{w\}^T \{\bar{P}\} \quad (۷۶ - ۱)$$

که در آن بار گره‌ای به صورت زیر است:

$$\{\bar{P}\} = p \int [N(\xi, \eta)]^T |J| d\xi d\eta \quad (۷۷ - ۱)$$

جایگذاری رابطه (۱ - ۷۱) و (۱ - ۶۶) به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\{\bar{P}\} = p \Delta \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} \quad (۷۸ - ۱)$$

گام چهارم: سرهم‌بندی اجزای محدود و اعمال شرایط مرزی

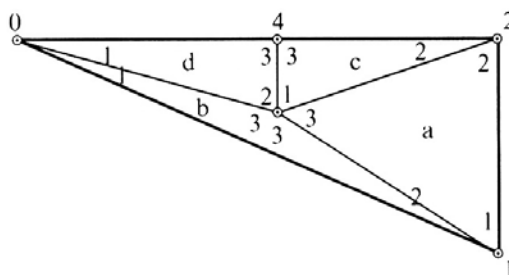
در خلال حل هر مسئله، مشخصات اجزای محدود منفرد، سرهم‌بندی شده و شرایط مرزی جابه‌جایی نیز اعمال می‌شود تا به مدل کلی بیانجامد. این سرهم‌بندی ساده از آنجا

امکان پذیر است که در هر گره، جابه‌جایی و تابع وزنی برای تمامی اجزایی که در این گره مشترک هستند، یکسان باشند. همچنین جابه‌جایی و تابع وزنی برای هر جزء، به شکل تکه‌ای و محلی تعیین می‌شوند که می‌توان سهم‌های این اجزای محدود را به‌سادگی به هم اضافه نمود.

همان‌طور که در گام دوم شرح داده شد، توابع کلی (جابه‌جایی تخمینی و تابع وزنی) از پیوستن توابع مربوط به اجزای محدود منفرد به یکدیگر ایجاد می‌شود. روند مزبور این امکان را فراهم می‌کند که سهم هر جزء محدود (شامل ماتریس سختی استاتیکی و بار گره‌ای برای مثال مورد بحث) تا عبارات وزن‌های باقیمانده، به صورت مستقل از سایر اجزا محاسبه شود.

مراحل سرهم‌بندی برای گوه به صورت زیر است (شکل ۱ - ۸). گوه به چهار مثلث a ، b ، c و d هر کدام با گره‌های محلی ۱، ۲ و ۳ تقسیم‌بندی می‌شود. ضرایب ماتریس سختی استاتیکی $K_{ij}^k, i, j = 1, 2, 3$ و $k = a, b, c, d$ از رابطه $(۶۳ - ۱)$ تبعیت می‌کنند. یک بالانویس برای اختصاص جزء محدود منفرد معرفی شده است. گره‌های مدل کلی با عددهای صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴ نام‌گذاری شده‌اند و جابه‌جایی‌های متناظر (درجات آزادی) به شکل $\{u\} = [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ مشخص شده‌اند. رابطه نیروی گره‌ای - جابه‌جایی گره‌ای کلی برابر است با:

$$\{P\} = [K]\{u\} - \{\bar{P}\} \quad (۷۹ - ۱)$$



شکل ۱ - ۸ نام‌گذاری کلی و محلی گره‌ها برای سرهم‌بندی.

ماتریس سختی استاتیکی کلی به صورت زیر سرهم می شود.

$$K_{00} = K_{11}^b + K_{11}^d$$

$$K_{01} = K_{12}^b$$

$$K_{02} = 0$$

$$K_{03} = K_{13}^b + K_{12}^d$$

$$K_{04} = K_{13}^d$$

$$K_{10} = K_{21}^b$$

$$K_{11} = K_{11}^a + K_{22}^b$$

$$K_{12} = K_{12}^a$$

$$K_{13} = K_{13}^a + K_{23}^b$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{20} = 0$$

$$K_{21} = K_{21}^a$$

$$K_{22} = K_{22}^a + K_{22}^c$$

$$K_{23} = K_{23}^a + K_{21}^c$$

(۸۰ - ۱)

$$K_{24} = K_{23}^c$$

$$K_{30} = K_{31}^b + K_{21}^d$$

$$K_{31} = K_{31}^a + K_{32}^b$$

$$K_{32} = K_{32}^a + K_{12}^c$$

$$K_{33} = K_{33}^a + K_{33}^b + K_{11}^c + K_{22}^d$$

$$K_{34} = K_{13}^c + K_{23}^d$$

$$K_{40} = K_{31}^d$$

$$K_{41} = 0$$

$$K_{42} = K_{32}^c$$

$$K_{43} = K_{31}^c + K_{32}^d$$

$$K_{44} = K_{33}^c + K_{33}^d$$

بردار بار گره‌ای کلی به صورت زیر سرهم می شود.

$$\bar{P}_0 = \bar{P}_1^b + \bar{P}_1^d$$

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_1^a + \bar{P}_2^b$$

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_2^a + \bar{P}_2^c$$

(۸۱ - ۱)

$$\bar{P}_3 = \bar{P}_3^a + \bar{P}_3^b + \bar{P}_1^c + \bar{P}_2^d$$

$$\bar{P}_4 = \bar{P}_3^c + \bar{P}_3^d$$

سهام‌های اجزای محدود منفرد، به مکان‌های مناسب خود در ماتریس سختی استاتیکی اضافه می‌شوند. برای مثال جزء c با گره‌های محلی ۱، ۲ و ۳ به سهم‌های گره‌های کلی ۳، ۲ و ۴ را می‌انجامد.

این مراحل سرهم‌بندی با سازگاری جابه‌جایی‌های گره‌ای و تعادل نیروهای گره‌ای مطابقت دارد. به‌عنوان مثال در گره کلی ۴، نیروهای گره‌ای جزء d در گره محلی ۳ و نیروهای گره‌ای جزء c در گره محلی ۳ اضافه می‌شوند و با نیروی گره‌ای خارجی اعمال شده در تعادل هستند.

مواردی به شرح زیر نیز اعمال می‌شوند: نخست، ماتریس سختی استاتیکی سرهم‌بندی شده $[K]$ متقارن است. دوم، $[K]$ کم‌حجم است. اگر گره‌های کلی i, j به‌طور مستقیم به‌وسیله یک جزء محدود متصل نباشند، جزء K_{ij} ناپدید می‌شود. این واقعیت، به‌عنوان مثال برای K_{02} ، وجود دارد. البته این یکی از نتایج انتخاب تکه‌ای توابع شکل محلی برای استفاد در تعیین جابه‌جایی تخمینی و تابع وزنی است. سوم، با انتخاب مناسب شکل نام‌گذاری کلی، $[K]$ نواری شکل خواهد شد؛ به این معنا که اجزای صفر تا جای ممکن از قطر فاصله می‌گیرند. برای مثال، اگر گره‌های صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان داده شده در شکل ۱ - ۸ در ستون‌ها و سطرهاى ماتریس به ترتیب صفر، ۱، ۳، ۴ و ۲ قرار گیرند، اجزای گوشه سمت راست بالای ماتریس متناظر با K_{02} در شکل نام‌گذاری اولیه صفر خواهند بود. اجزای غیرصفر در ماتریس $[K]$ در دو سمت قطر اصلی، نواری را تشکیل می‌دهند. الگوریتم‌های کارآمدی برای حل ماتریس نواری متقارن وجود دارد.

از آنجا که در رابطه‌سازی باقیمانده‌های وزنی رابطه (۱ - ۵۳) جابه‌جایی تخمینی u ، جابه‌جایی بیان شده \bar{u} بر S_u را ارضا می‌کند، شرایط مرزی جابه‌جایی باید اعمال شود. رابطه نیروی نیروی گره‌ای - جابه‌جایی کلی (رابطه (۱ - ۷۹)) به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} & K_{03} & K_{04} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{30} & K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{40} & K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۸۲ - ۱)$$

۱. مبانی تحلیل عددی ۲۹

در تمامی گره‌های کلی، بارهای گره‌ای معلوم اعمال شده‌اند و در گره‌های صفر، ۱ و ۲ نیروهای عکس‌العمل مجهول R_0 ، R_1 و R_2 ظاهر می‌شوند. شرایط مرزی جابه‌جایی برابرند با:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 0 \\ u_2 &= \bar{u}_2 \end{aligned} \quad (۸۳ - ۱)$$

جایگذاری رابطه (۱ - ۸۳) در رابطه (۱ - ۸۲) منجر به معادله‌های جبری نهایی می‌شود که در این حالت دو مجهول حل تخمینی گوه را معرفی می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} K_{32} \\ K_{42} \end{Bmatrix} \bar{u}_2 + \begin{Bmatrix} \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{Bmatrix} \quad (۸۴ - ۱)$$

گام پنجم: حل معادلات کلی

معادلات خطی متقارن که در کل به صورت نواری و توصیف‌کننده مدل کلی هستند، می‌توانند به طرز مؤثری حل شوند که منجر به جابه‌جایی‌ها در تمامی گره‌ها می‌شود. از رابطه (۱ - ۸۴)، u_3 و u_4 محاسبه می‌شوند. سپس نیروهای عکس‌العمل به شکل زیر از رابطه (۱ - ۸۲) تبعیت می‌کنند.

$$\begin{aligned} R_0 &= K_{02}\bar{u}_2 + K_{03}u_3 + K_{04}u_4 - \bar{P}_0 \\ R_1 &= K_{12}\bar{u}_2 + K_{13}u_3 + K_{14}u_4 - \bar{P}_1 \\ R_2 &= K_{22}\bar{u}_2 + K_{23}u_3 + K_{24}u_4 - \bar{P}_2 \end{aligned} \quad (۸۵ - ۱)$$

گام ششم: محاسبه نتایج تکمیلی

با شروع از جابه‌جایی‌های گره‌ای معلوم از اجزای محدود، نتایج اضافی مثل جابه‌جایی‌ها در درون اجزا و تنش‌ها به سادگی محاسبه می‌شوند. از آنجا که محاسبه تنش‌ها منجر به مشتق‌گیری از توابع شکل می‌شود، دقت تنش‌ها به طور کلی از دقت جابه‌جایی‌ها کمتر خواهد بود.

به عنوان مثال، $u(x, y)$ از رابطه (۱ - ۴۳) و $\{\tau\}$ از رابطه (۱ - ۳) تبعیت کرده که در آن $u_{,x}$ و $u_{,y}$ در رابطه (۱ - ۵۵) مشخص شده‌اند.

برای مثال مورد نظر (گوه شکل ۱ - ۳ در بند ۱ - ۲)، نتایج زیر به دست آمده است. جابه‌جایی در نقطه P که u_3 است، برابر است با $0.073\bar{u} + 0.015(r_0^2/G)p$ و تنش برشی (کشش سطحی) ثابت τ_x بر وجه ۱ - ۲ برابر است با $1.353(G/r_0)\bar{u} - 0.031r_0p$. به منظور کامل بودن بحث، بسط از شرایط استاتیکی به دینامیکی بررسی شده است. در عبارت باقیمانده‌های وزنی در رابطه (۱ - ۵۳)، بخش $p \int_V \ddot{u}(t) w dV$ اضافه شده است (رابطه (۱ - ۳۸)). باز اشاره می‌شود که سهم هریک از اجزای محدود می‌تواند مشخص شود.

$$\rho \int w^T \ddot{u} dx dy \quad (۱ - ۸۶)$$

انتگرال بر روی جزء منشأ انجام گرفته است (شکل ۱ - ۷). جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۵۲)، (۱ - ۷۱) و (۱ - ۷۲) در رابطه (۱ - ۸۶) به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\{w\}^T \rho \int [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \{\ddot{u}\} \quad (۱ - ۸۷)$$

که در آن $|J| = 2\Delta$ است. دوباره یادآور می‌شود که $\{w\}^T$ انتخابی بوده و بردار باقی‌مانده برابر با نیروهای گره‌ای است که به عنوان حاصل ضرب ماتریس جرم $[M]$ در بردار شتاب $\{\ddot{u}\}$ تعریف شده است. بنابراین $[M]$ برابر با رابطه زیر خواهد بود:

$$[M] = \rho \int [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] 2\Delta d\xi d\eta \quad (۱ - ۸۸)$$

که در آن $[N(\xi, \eta)]$ توابع خطی ξ, η هستند (رابطه (۱ - ۵۱)). با استفاده از انتگرال‌گیری بر روی مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین جزء منشأ خواهیم داشت:

$$\int (1 - \xi - \eta)^\alpha \xi^\beta \eta^\gamma d\xi d\eta = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \quad (۱ - ۸۹)$$

ماتریس جرم جزء مثلثی با توابع شکل خطی برابر است با:

$$[M] = \Delta \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (۱ - ۹۰)$$

۱. مبانی تحلیل عددی ۳۱

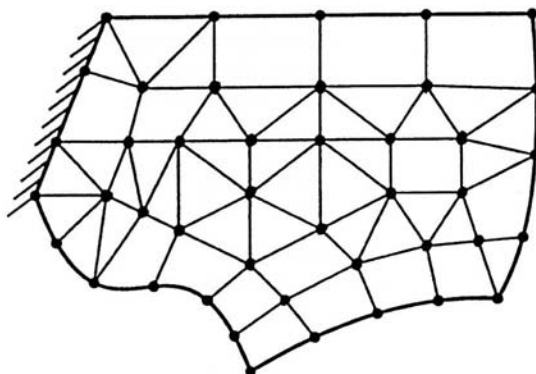
با اضافه کردن بخش دینامیکی به بخش استاتیکی (رابطه (۱ - ۷۹))، رابطه نیروی گره‌ای - جابه‌جایی گره‌ای برای شرایط دینامیکی به دست می‌آید:

$$\{P\} = [K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} - \{P\} \quad (۹۱ - ۱)$$

از آنجا که $[M]$ مشابه با $[K]$ سرهم‌بندی شده است، این معادله برای سیستم کلی نیز به کار می‌رود، به گونه‌ای که تمامی ماتریس‌ها و بردارها به‌طور متناظر بسط داده می‌شوند.

مشخصات روش اجزای محدود را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

- حوزه به‌صورت فضایی جداسازی شده (شکل ۱ - ۹) و باعث به‌وجود آمدن تعداد زیادی مجهول گره‌ای (درجات آزادی) می‌شود.
- فرضیه توابع شکل برای جابه‌جایی تخمینی، که به‌صورت تکه‌ای و محلی در جزء محدود هستند، ویژگی اصلی و مرکزی این روش است.
- از آنجا که توابع شکل چندجمله‌ای هستند، انتگرال‌گیری استاندارد توابع منظم منجر به تولید ماتریس سختی استاتیکی و بردار بار (و ماتریس جرم در حالت دینامیکی) می‌شود.
- سرهم‌بندی، یا همان جمع کردن مشخصات اجزای محدود منفرد، باعث ایجاد تعادل و سازگاری مدل کلی می‌شود. سیستم معادلات نتیجه شده به‌صورت متقارن (به‌دلیل اینکه توابع شکل مشابهی برای جابه‌جایی‌های تخمینی و توابع وزنی استفاده شده است)، کم‌حجم (چون توابع شکل برای هر جزء محدود به‌صورت محلی تعریف شده است، در هر سطر فقط چند اجزای غیرصفر وجود دارد) و همچنین نواری شکل (برای نام‌گذاری مناسب) است.
- الگوریتم‌های خاصی با استفاده از ساختار نواری ماتریس ضریب این امکان را فراهم می‌کند که سیستم‌های بزرگ با مجهولات زیاد حل شوند.
- از آنجا که کشش‌های سطحی (تنش‌ها) از مشتق توابع شکل تبعیت می‌کنند و مجهولات مستقل ظاهر شده در سیستم معادلات نیستند، دقت آنها در کل کمتر از دقت جابه‌جایی‌ها خواهد بود.
- عبارت باقیمانده‌های وزنی می‌تواند به‌عنوان کاربردی از کمینه انرژی پتانسیل تفسیر شود. افزایش تعداد درجات آزادی با اصلاح شبکه‌بندی، باعث همگرایی از سمت سخت و به‌عبارت دیگر، باعث افزایش انرژی کرنشی می‌گردد.



شکل ۹-۱ جداسازی فضایی در روش اجزای محدود

- روش اجزای محدود برای مصالح ناهمگن و ناهمسان بسیار مناسب می باشد.
- با نمایش محیط بدون مرزی مانند خاک زیر سد در شکل ۱ - ۱، روش استاندارد اجزای محدود نمی تواند شرایط در بی نهایت را به طور دقیقی بیان کند. از آنجا که نمی توان یک مدل منتهی به بی نهایت را با تعداد اجزای محدود مدل کرد، جداسازی فضایی اجزای محدود به یک مرز مصنوعی خاتمه می یابد، به طوری که رفتار فیزیکی حوزه جدا شده بیرون از این مرز، فقط به طور تخمینی مدل می شود.

۱-۵ روش اجزای مرزی

ویژگی های اصلی روش اجزای مرزی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد. مرز محیط، به زیرمرزهای غیرمشترکی تقسیم می شود که اجزای مرزی نامیده می شود. از آنجا که حل مسئله از ترکیب حل های دقیق (که حل های بنیادی خوانده می شود) تبعیت می کند که در دامنه داخلی متناظر با تغییرات فرضی مقادیر مرزی مجهول است، به جداسازی فضایی داخلی نیاز نیست. این قضیه منجر به کاهش بعد تکه های فضایی به یک میزان می گردد. به عنوان مثال، برای مسئله دوبعدی، تنها اجزای مرزی خطی بررسی شده اند. براساس معادله انتگرال مرزی که بر روی هر جزء مرزی انتگرال گیری می شود، حاصل ضرب تغییرات مجهولات و حل دقیق، سهم را به ماتریس ضریب های معادلات تبدیل می کند که توصیف کننده مدل کلی است و می تواند حل شود.

۱. مبانی تحلیل عددی ۳۳

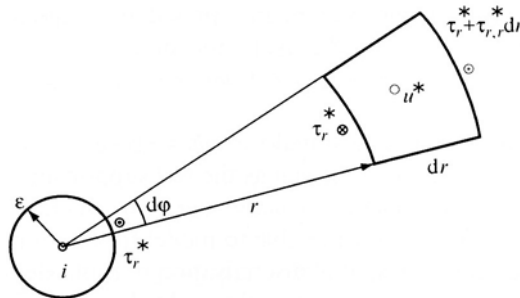
قبل از توصیف گام‌های اصلی، معادله انتگرال مرزی به دست آمده است. بار دیگر معادله لاپلاس توصیف شده در بند ۱ - ۲ مورد استفاده قرار گرفته است. نقطه شروع، عبارت باقیمانده‌های وزنی رابطه (۱ - ۳۳) بوده که قبل از اعمال هر شرط مرزی ($S = S_u + S_t$) نوشته می‌شود.

$$-G \int_V (w_{,xx} + w_{,yy}) u dV - \int_V p w dV + G \int_S u w_{,n} dS = \int_S \tau_n w dS \quad (92 - 1)$$

برای به دست آوردن رابطه‌ای که توسط آن قسمت اول سمت چپ رابطه (۱ - ۹۲) بتواند به صورت یک انتگرال مرزی نوشته شود، تابع وزنی خاصی که حل بنیادی نامیده می‌شود، انتخاب شده و با علامت ستاره مشخص می‌شود ($w = u^*, Gw_{,n} = \tau_n^*$). یک بار واحد متمرکز به صفحه دوبعدی نامحدود در نقطه i اعمال می‌شود (شکل ۱ - ۱۰) که تابع دیراک دلتا δ خوانده می‌شود و با توزیع خاصی از فشار تماسی بر سطح کوچکی که به صفر میل می‌کند (به عنوان مثال، ثابت بر روی دایره‌ای با شعاع ε که $\varepsilon \rightarrow 0$) متناظر است و مقداری برابر با یک خواهد داشت.

$$\int_V \delta dV = 1 \quad (93 - 1)$$

حاصل ضرب انتگرال δ اعمال شده بر نقطه i که با δ_i نشان داده می‌شود در جابه‌جایی u برابر است با u محاسبه شده در نقطه i یا همان u_i .



شکل ۱ - ۱۰ جزء بسیار کوچک مورد استفاده در حل بنیادی.

$$\int_V \delta u dV = u_i \quad (94 - 1)$$

معادله دیفرانسیل حاکم (رابطه (۱ - ۴)) حل بنیادی با تابع دلتای دیراک در نقطه i برابر است با:

$$G(u^*_{,xx} + u^*_{,yy}) + \delta_i = 0 \quad (95 - 1)$$

رابطه (۱ - ۹۲) با حل بنیادی برابر با تابع وزن، به صورت زیر بیان می شود:

$$-G \int_V (u^*_{,xx} + u^*_{,yy}) u dV - \int_V p u^* dV + \int_S u \tau_n^* dS = \int_S \tau_n u^* dS \quad (96 - 1)$$

با جایگذاری رابطه (۱ - ۹۵) در رابطه (۱ - ۹۶) و اعمال رابطه (۱ - ۹۴) به دست می دهد:

$$u_i - \int_V p u^* dV + \int_S u \tau_n^* dS = \int_S \tau_n u^* dS \quad (97 - 1)$$

در این رابطه، بار واحد متمرکز در نقطه i اعمال شده که منجر به جابه جایی متناظر u^* و کشش سطحی τ_n^* که حل بنیادی را توصیف می کند، می گردد. نقطه i در درون حوزه قرار دارد.

برای دستیابی به حل بنیادی که در اثر تقارن یک تابع شعاعی به ضخامت r از نقطه i است (شکل ۱ - ۱۰)، رابطه سازی تعادل یک جزء بسیار کوچک بارگذاری نشده ($r > \epsilon$) به صورت زیر نوشته می شود:

$$-\tau_r^* r d\phi + (\tau_r^* + \tau_{r,r}^* dr)(r + dr) d\phi = 0 \quad (98 - 1)$$

که به رابطه زیر منجر می شود:

$$\frac{1}{r} \tau_r^* + \tau_{r,r}^* = 0 \quad (99 - 1)$$

قانون سازگاری برای مصالح همسان بیان شده در مشتق جابه جایی (رابطه (۱ - ۸)) برابر است با:

$$\tau_r^* = G u_{,r}^* \quad (100 - 1)$$

با جایگذاری رابطه (۱ - ۱۰۰) در رابطه (۱ - ۹۹) خواهیم داشت:

$$G\left(u, {}^*_{rr} + \frac{1}{r}u, {}^*_r\right) = 0 \quad (۱ - ۱۰۱)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل معمولی، رابطه زیر

$$v = u, {}^*_r \quad (۱ - ۱۰۲ - الف)$$

جایگذاری شده و منجر به رابطه زیر:

$$v, {}_r + \frac{1}{r}v = 0 \quad (۱ - ۱۰۲ - ب)$$

یا رابطه زیر می شود:

$$\frac{v, {}_r}{v} = -\frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۲ - پ)$$

که برابر است با:

$$(\ln v), {}_r = -\frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۲ - ت)$$

با جایگذاری

$$w = \ln v \quad (۱ - ۱۰۲ - ث)$$

رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$w, {}_r = -\frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۲ - ج)$$

با داشتن حل زیر:

$$w = -\ln r = \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (۱ - ۱۰۲ - چ)$$

از رابطه های ((۱ - ۱۰۲ - ث)) و ((۱ - ۱۰۲ - چ)) رابطه زیر به دست می آید:

$$v = \frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۲ - ح)$$

رابطه زیر نتیجه رابطه (۱ - ۱۰۲ - الف) است.

$$u_{,r}^* = \frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۲ - خ)$$

که حل آن برابر است با:

$$u^* = \ln r \quad (۱ - ۱۰۲ - د)$$

هر ضریب ثابت C را می‌توان به صورت زیر معرفی نمود:

$$u^* = -c \ln r = c \ln \frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۲ - ذ)$$

که رابطه (۱ - ۱۰۱) را نیز ارضا می‌کند. حل دوم این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، ثابتی است که می‌تواند حذف شود زیرا با حرکت جسم صلب با تنش برشی زایل‌شونده مطابقت دارد.

برای تعیین ثابت C ، تعادل دایره بارگذاری شده با شعاع بسیار کوچک ε بررسی می‌شود (شکل ۱ - ۱۰). مجموع حاصل ضرب تنش برشی $\tau_r^*(r = \varepsilon)$ در محیط $2\pi\varepsilon$ و بار متمرکز ۱ برابر صفر است.

$$2\pi\varepsilon\tau_r^*(r = \varepsilon) + 1 = 0 \quad (۱ - ۱۰۳)$$

τ_r^* با استفاده از رابطه (۱ - ۱۰۰) و رابطه (۱ - ۱۰۲ - ذ) به دست می‌آید:

$$\tau_r^* = -Gc \frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۴)$$

با قرار دادن $r = \varepsilon$ در رابطه (۱ - ۱۰۴) و جایگذاری در رابطه (۱ - ۱۰۳) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c = \frac{1}{2\pi G} \quad (۱ - ۱۰۵)$$

بنابراین حل بنیادی برابر خواهد بود با:

$$u^* = \frac{1}{2\pi G} \ln \frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۶)$$

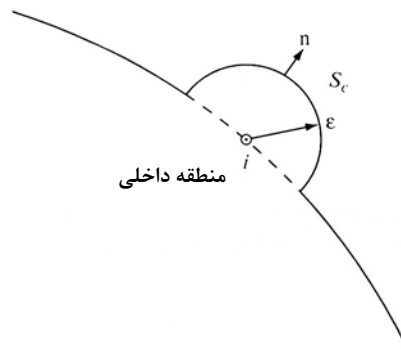
$$\tau_r^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (۱ - ۱۰۷)$$

۱. مبانی تحلیل عددی ۳۷

که در آن فاصله r از نقطه مبدأ i (نقطه اعمال تابع دلتای دیراک) تا نقطه دریافت کننده که حل در آن باید تعیین شود، اندازه‌گیری شده است. در رابطه (۱ - ۹۷)، نقطه دریافت کننده با هر موقعیت ثابت i که بار متمرکز در آن قرار دارد، تغییر می‌کند. در شرایطی که $r \rightarrow 0$ ، u^* و τ_r^* بی‌نهایت می‌شوند که تکین τ_r^* (در برداشتن یک مشتق) قوی‌تر از u^* است. در رابطه (۱ - ۹۷)، نقطه i درون حوزه قرار دارد. برای به دست آوردن معادله انتگرال مرزی با در نظر گرفتن مقادیر مرزی، نقطه i یعنی جایی که تابع دلتای دیراک اعمال شده، به مرزی انتقال یافته که فرض می‌شود به طور موضعی صاف است؛ یعنی مکانی که در آن بار متمرکز قرار دارد (بدون گوشه). یک روش آسان برای نشان دادن این حد، در نظر گرفتن نقطه i بر روی مرز، اما با افزایش دامنه به وسیله یک نیم‌دایره با شعاع ε و مرکز i است (شکل ۱ - ۱۱). نقطه i می‌تواند به عنوان نقطه‌ای درون حوزه در نظر گرفته شود که رابطه (۱ - ۹۷) در این مورد به کار می‌رود. اعمال حد $\varepsilon \rightarrow 0$ ، نقطه i را به مرز انتقال می‌دهد که منجر به معادله انتگرال مرزی متناظر می‌گردد.

رفتار دو انتگرال سطحی در رابطه (۱ - ۹۷) برای $\varepsilon \rightarrow 0$ آزموده شده است. انتگرال سمت راست، پس از جایگذاری رابطه (۱ - ۱۰۶) با محیط نیم‌دایره $S_c = \pi\varepsilon$ رابطه‌سازی شده است.

$$\int_{S_c} \tau_n u^* dS = \frac{1}{2\pi G} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_c} \tau_n \ln \frac{1}{\varepsilon} dS = \frac{1}{2\pi G} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\tau_n \ln \frac{1}{\varepsilon} \pi\varepsilon \right) = 0 \quad (1 - 108)$$



شکل ۱ - ۱۱ نیم‌دایره با شعاع بسیار کوچک پیرامون نقطه روی مرز.

که با $\varepsilon \rightarrow 0$ ، $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow 0$. این به آن معناست که با انتقال نقطه i به مرز، هیچ تغییری در سمت راست رابطه (۱ - ۹۷) ایجاد نمی‌شود. با این حال، انتگرال سمت چپ که تکین قوی‌تری دارد (رابطه ۱ - ۱۰۷)، به یک عبارت پایدار می‌انجامد.

$$\int_{S_c} u \tau_n^* dS = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_c} u \frac{1}{\varepsilon} dS = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u \frac{\pi\varepsilon}{\varepsilon} \right) = -\frac{u_i}{2} \quad (1 - 109)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۱۰۸) و (۱ - ۱۰۹) در رابطه (۱ - ۹۷)، رابطه انتگرال مرزی برای نقطه مرزی i به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} u_i - \int_V p u^* dV + \int_S u \tau_n^* dS = \int_V \tau_n u^* dS \quad (1 - 110)$$

رابطه (۱ - ۱۱۰) می‌تواند در هر نقطه در مرز رابطه‌سازی شود و به یک سیستم معادلات مرزی برسد.

در رابطه‌های (۱ - ۱۱۰) و (۱ - ۹۷)، بار حجمی p به صورت انتگرال بر روی دامنه V (انتگرال دوم در سمت چپ رابطه) بیان شده که می‌توان آن را به صورت زیر به شکل یک انتگرال مرزی معادل تبدیل نمود. با کسر رابطه (۱ - ۳۳) از رابطه (۱ - ۳۵) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$G \int_V (u_{,xx} + u_{,yy}) w dV - G \int_V (w_{,xx} + w_{,yy}) u dV = -G \int_S u w_{,n} dS + G \int_S u_{,n} w dS \quad (1 - 111)$$

با در نظر گرفتن $\tau_n = G u_{,n}$ و $S = S_u + S_t$ ، G می‌تواند حذف شود. با انتخاب $u = v^*$ ، تابعی که به حل بنیادی ارتباط داشته و به صورت زیر معرفی شده و همچنین با انتخاب $w = p$ ، رابطه (۱ - ۱۱۱) به شکل زیر تبدیل شود:

$$\int_V (v_{,xx}^* + v_{,yy}^*) p dV - \int_V (p_{,xx} + p_{,yy}) v^* dV = - \int_S v^* p_{,n} dS + \int_S v_{,n}^* p dS \quad (1 - 112)$$

۱. مبانی تحلیل عددی ۳۹

محدودیت معرفی شده برای p هارمونیک بودن آن است، یعنی:

$$p_{,xx} + p_{,yy} = 0 \quad (113 - 1)$$

که برای یک عدد ثابت و یک تغییر خطی بر روی دامنه، ارضا می‌شود. به‌علاوه رابطه زیر:

$$v_{,xx}^* + v_{,yy}^* = u^* \quad (114 - 1)$$

با u^* که بیانگر حل بنیادی است، اعمال می‌شود (رابطه (۱ - ۱۰۶)). رابطه (۱ - ۱۱۴)، v^* را تعیین می‌کند. با جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۱۱۳) و (۱ - ۱۱۴) در رابطه (۱ - ۱۱۲) خواهیم داشت:

$$\int_V pu^* dV = - \int_S p_{,n} v^* dS + \int_S p v_{,n}^* dS \quad (115 - 1)$$

بنابراین انتگرال بر روی دامنه، مانند سایر انتگرال‌های مرزی در معادله انتگرال مرزی، با دو انتگرال بر روی مرز همان دامنه جایگزین می‌شود. برای بار حجمی ثابت p ، انتگرال اول در سمت راست صفر می‌شود ($p_{,n} = 0$).

مانند v^* تابع زیر استفاده می‌شود که رابطه (۱ - ۱۱۴) را ارضا می‌کند.

$$v^* = \frac{r^2}{8\pi G} \left(1 + \ln \frac{1}{r} \right) \quad (116 - 1)$$

این قضیه به‌شرح زیر بررسی می‌شود؛ در مختصات قطبی که فاقد تغییرات محیط باشد، اپراتور لاپلاس (رابطه (۱ - ۱۰۱) را ببینید) متناظر با سمت چپ رابطه (۱ - ۱۱۴) برابر است با:

$$v_{,rr}^* + \frac{1}{r} v_{,r}^* \quad (117 - 1)$$

مشتق‌هایی نظیر

$$v_{,r}^* = \frac{r}{8\pi G} \left(1 + 2 \ln \frac{1}{r} \right) \quad (118 - 1)$$

از رابطه (۱ - ۱۱۶) تعیین می‌شوند. با جایگذاری در رابطه (۱ - ۱۱۷)، u^* مشخص شده در رابطه (۱ - ۱۰۶) به‌دست می‌آید.

گام‌های اصلی در روش اجزای مرزی، با استفاده از مثال گوه که در شکل ۱ - ۳ نشان داده شده و با معادله لاپلاس برای بار حجمی که در بند ۱ - ۲ توصیف شده، توضیح داده شده‌اند. در شرایط استاتیکی، شش گام زیر قابل تعریف است.

گام اول: گسست فضایی مرز

مرز به تعدادی زیرمرز به نام اجزای مرزی تقسیم شده است. این روش مشابه روشی است که برای اجزای محدود به کار می‌رود (گام اول روش اجزای محدود در بند ۱ - ۴ را ببینید)، با این تفاوت که یک بُعد کاهش یافته است. برای مسئله دوبعدی اجزای خط مرزی به کار می‌رود.

مرز گوشه ۲ - ۱ - ۰ (شکل ۱ - ۱۲) به سه جزء خطی مستقیم ۰ - ۲، ۲ - ۱، ۱ - ۰ تقسیم شده است.

گام دوم: جابه‌جایی و کشش سطحی درون جزء مرزی

روش حل تقریبی جابه‌جایی و کشش سطحی به صورت تکه‌ای روی هر جزء مرزی تعریف می‌شود. مقادیر جابه‌جایی گره‌ای و کشش سطحی به عنوان مجهولات در نظر گرفته می‌شوند. جابه‌جایی و کشش سطحی درون جزء مرزی بر حسب مقادیر گره‌ای به وسیله توابع شکل در دستگاه مختصات محلی درون‌یابی می‌شود. هیچ الزامی بر پیوستگی جابه‌جایی و کشش سطحی در اجزای مرزی مجاور روی مرز وجود ندارد.

برای هر یک از سه جزء مرزی، گره در وسط آن جزء انتخاب شده و مقادیر گره‌ای u و τ_n الحاق می‌شوند. اجزای ثابت انتخاب می‌شوند، یعنی فرض می‌شود که u و τ_n روی هر جزء مرزی ثابت بوده و برابر مقادیر گره‌ای خود هستند. این به آن معناست که به طور کلی، در گره گوشه یک ناپیوستگی در جابه‌جایی رخ می‌دهد. روی هر جزء مرزی جابه‌جایی یا کشش سطحی به عنوان شرط مرزی در نظر گرفته می‌شود. مقادیر معلوم در شکل ۱ - ۱۲ با «بار» نشان داده شده است. مقادیر گره‌ای در بردارهای $\{u\}$ و $\{\tau_n\}$ به صورت

$$\{u\} = [u_1, u_2, u_3]^T \quad \text{و} \quad \{\tau_n\} = [\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}]^T$$

در نظر گرفته شده‌اند.

گام سوم: حل بنیادی معادله دیفرانسیل حاکم

یک روش حل بنیادی که معادله دیفرانسیل حاکم را ارضاء نماید باید وجود داشته باشد و الزامی نیست که شرایط مرزی مسئله اعمال شوند. به طور کلی، حل دقیق برای یک بار متمرکز در یک حوزه نامحدود بازگوکننده حل بنیادی است. برای معادله لاپلاس دوبعدی حل بنیادی u^* و τ_r^* در رابطه‌های (۱ - ۱۰۶) و (۱ - ۱۰۷) مشخص می‌شود.

گام چهارم: معادله انتگرال مرزی گسسته و اعمال شرایط مرزی

با جایگذاری رابطه (۱ - ۱۱۵) برای مقدار p ثابت در رابطه (۱ - ۱۱۰) به رابطه انتگرال مرزی می‌رسیم.

$$\frac{1}{2}u_i + \int_S u \tau_n^* dS = \int_S \tau_n u^* dS + \int_S p v_n^* dS \quad (1 - 119)$$

در کنار مقدار بار، با انتگرال گیری روی مرز فقط مقادیر جابه‌جایی u و کشش سطحی τ_n روی مرز، در این معادله ظاهر می‌شوند. رابطه (۱ - ۱۱۹) به N جزء مرزی ثابت تفکیک شده تا سیستمی را تعیین کند که مقادیر مرزی بتوانند به وسیله آن تعیین شوند. نقطه i یکی از گره‌های مرزی را نشان می‌دهد، این منجر می‌شود به:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} \tau_n^* dS \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} u^* dS \right) \tau_{nj} + \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} v_n^* dS \right) p \quad (1 - 120)$$

چون توابع u_j و τ_{nj} مقدار ثابت هستند، می‌توانند از انتگرال j ام جزء مرزی با مرز S_j خارج شوند انتگرال‌های زیر:

$$H_{ij} = \int_{S_j} \tau_n^* dS \quad (1 - 121)$$

$$G_{ij} = \int_{S_j} u^* dS \quad (122 - 1)$$

$$\bar{P}_{ij} = p \int_{S_j} v_{,n}^* dS \quad (123 - 1)$$

گره i ، محل اعمال نیروی متمرکز را به z امین گره، با در نظر گرفتن انتگرال‌های متناظر حل بنیادی u^* و τ_n^* یا v^* را روی z امین جزء مرزی، ارتباط می‌دهند. برای گره i ، رابطه (۱ - ۱۲۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \tau_{nj} + \sum_{j=1}^N \bar{P}_{ij} \quad (124 - 1)$$

رابطه (۱ - ۱۲۴) می‌تواند به صورت پی در پی برای هر گره نوشته شود. یعنی برای $i = 1, 2, 3, \dots, N$ این روند مجموعه‌ای شامل N معادله انتگرال مرزی گسسته را نتیجه می‌دهد که فرم کلی معادلات عبارت است از:

$$\left(\frac{1}{2} [I] + [H] \right) \{u\} = [G] \{\tau_n\} + \{\bar{P}\} \quad (125 - 1)$$

که $[I]$ ماتریس واحد است. با داشتن تعداد $2N$ مقدار برای $\{u\}$ و $\{\tau_n\}$ ، تعداد N مقدار مرزی معلوم است زیرا نمایانگر شرایط مرزی‌اند. در نتیجه تعداد N مقدار مجهول روی مرز وجود خواهد داشت که به طور کلی شامل جابه‌جایی و کشش سطحی است. $\{\bar{P}\}$ شامل مؤلفه‌های P_i و $i = 1, \dots, N$ ، مقدار معلوم است. مقادیر معلوم به سمت راست رابطه و مقادیر مجهول به سمت چپ رابطه منتقل می‌شوند که با حل دستگاه معادلات می‌توانند تعیین شوند. بنابراین روش جزء مرزی تمام مقادیر مرزی جابه‌جایی و کشش سطحی را تعیین می‌کند. باید اشاره شود که ماتریس ضرایب شامل تمام درایه‌ها بوده و متقارن نیست.

برای گوه گسستگی نشان داده شده در شکل ۱ - ۱۲ و $N = 3$ ، رابطه گسسته

انتگرال مرزی (۱ - ۱۲۵) برابر است با:

$$\left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{n1} \\ \tau_{n2} \\ \tau_{n3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} \quad (126 - 1)$$

۴۳ ۱. مبانی تحلیل عددی

با اعمال شرایط مرزی (بند ۱ - ۲ را ببینید):

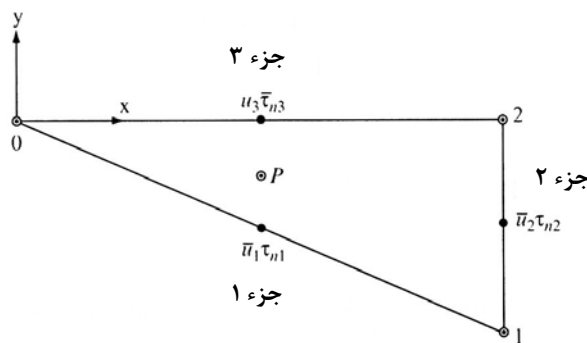
$$\begin{aligned} u_1 = \bar{u}_1 &= 0 \\ u_2 = \bar{u}_2 &= 0.5\bar{u} \\ \tau_{n3} = \bar{\tau}_{n3} &= 0 \end{aligned} \quad (1-127)$$

و انتقال مقادیر معلوم به سمت راست رابطه و مقادیر مجهول به سمت چپ رابطه، داریم:

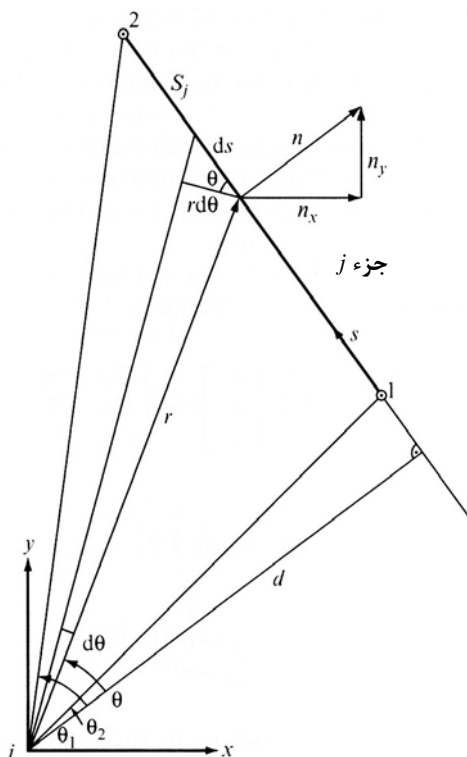
$$\begin{bmatrix} -G_{11} & -G_{12} & H_{13} \\ -G_{21} & -G_{22} & H_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & \frac{1}{2} + H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{n1} \\ \tau_{n2} \\ u_3 \end{Bmatrix} = -0.5 \begin{Bmatrix} H_{12} \\ \frac{1}{2} + H_{22} \\ H_{32} \end{Bmatrix} \bar{u} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} \quad (1-128)$$

باید اشاره شود که ضرایب در رابطه (۱ - ۱۲۶) متناظر با شرایط مرزی همگن نباید ارزیابی شود $(H_{11}, H_{21}, H_{31}, G_{13}, G_{23}, G_{33})$.

برای اجزای مرزی ثابت، انتگرال‌های H_{ij} و G_{ij} (همچنین \bar{P}_{ij}) می‌تواند به صورت تحلیلی محاسبه شوند. به عنوان مثال نمایش هندسی برای موردی که نقطه i (قابل کاربرد برای بارهای متمرکز) بر روی جزء مرزی j (انتگرال‌گیری باید انجام شود)، قرار نمی‌گیرد، در شکل ۱ - ۱۳ نشان داده شده است. انتگرال‌گیری بر روی S_j از روی گره محلی ۱ به ۲ با حوزه‌ای که بر روی قسمت چپ قرار گرفته انجام شده است. دستگاه مختصات قطبی که در آن مرکز مختصات بر روی نقطه i قرار گرفته، معرفی شده و در آن زاویه θ از روی خط عمود بر جزء مرزی j ام اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۱ - ۱۲ تقسیم مرز گوه به سه جزء مرزی با جابه‌جایی و کشش سطحی ثابت.



شکل ۱-۱۳ شرایط هندسی در محاسبه ضرایب معادله انتگرال مرزی گسسته.

حل بنیادی برای u^* از رابطه (۱-۱۰۶) به صورت زیر مشخص می شود:

$$u^* = \frac{1}{2\pi G} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi G} \ln r \quad (1-129)$$

τ_n^* با رابطه زیر و به وسیله رابطه (۱-۸) بیان می شود:

$$\tau_n^* = G u_{,n}^* \quad (1-130)$$

مشتق جزئی با توجه به بردار یکه به سمت خارج $\{n\}$ با مؤلفه های n_x و n_y به صورت زیر رابطه سازی می شود:

$$u_{,n}^* = u_{,r}^* r_{,n} = u_{,r}^* (r_{,x} n_x + r_{,y} n_y) \quad (1-131)$$

با تعریف زیر و معادله (۱ - ۱۲۹):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1 - 132)$$

مشتقات ارزشیابی شده و با جایگذاری در رابطه (۱ - ۱۳۰) رابطه زیر را به دست می دهد:

$$\tau_n^* = -\frac{1}{2\pi r^2} (xn_x + yn_y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{r^2} \quad (1 - 133)$$

عبارت درون پرانتز که برابر ضرب عددی بردارهای $\{r\}$ و $\{n\}$ است، بیانگر فاصله d ، فاصله بین نقطه i تا جزء مرزی z می باشد (برای وضعیت شکل ۱ - ۱۳۳ مثبت است).

جزء H_{ij} در معادله (۱ - ۱۲۱) به شرح زیر بیان می شود:

$$H_{ij} = \int_{S_j} \tau_n^* ds \quad (1 - 134)$$

با

$$ds = \frac{r}{\cos\theta} d\theta \quad (1 - 135 \text{ الف})$$

و

$$r = \frac{d}{\cos\theta} \quad (1 - 135 \text{ ب})$$

رابطه (۱ - ۱۳۴) به رابطه زیر منجر می شود:

$$H_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (1 - 136)$$

جزء G_{ij} در رابطه (۱ - ۱۲۲) به صورت زیر بیان می گردد:

$$G_{ij} = \int_{S_j} u^* ds \quad (1 - 137)$$

که به صورت مشابه با جایگذاری در رابطه (۱ - ۱۲۹) به دست می آید:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi G} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln \frac{\cos\theta}{d} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \quad (1 - 138)$$

که این جزء برابر است با:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi G} d \left(\tan \theta_2 - \tan \theta_1 - \theta_2 + \theta_1 + \tan \theta_2 \ln \frac{\cos \theta_2}{d} - \tan \theta_1 \ln \frac{\cos \theta_1}{d} \right) \quad (139 - 1)$$

(در آرگومان تابع \ln ، d مثبت است.)

در شرایطی که نقطه i (محل اعمال نیروی متمرکز) روی جزء مرزی $i = j$ (انتگرال گیری شود) قرار داشته باشد، حالت تکین اتفاق می افتد. طول جزء i ام برابر l است. با قرارگیری نقطه i در وسط جزء مرزی $i = j$ ، بردار $\{r\}$ در جهت جزء ۲ - ۱ بر بردار به سمت خارج یکه $\{n\}$ عمود خواهد بود که در این حالت d در رابطه (۱ - ۱۳۳) برابر صفر شده و از این رو $\tau_{nn}^* = 0$ می شود. آشکار است که بردار یکه با امتداد پیرامونی در حل بنیادی، در جایی که تنش برشی پیرامونی وجود ندارد، متناظر است (شکل ۱ - ۱۰). از رابطه (۱ - ۱۲۱) داریم:

$$H_{ij} = 0 \quad (140 - 1)$$

بنابراین برای درایه های روی قطر ماتریس ضرایب جابه جایی عبارت $\frac{1}{4}$ در رابطه (۱ - ۱۲۶) باقی می ماند. برای ضریب دیگر با جایگزینی رابطه (۱ - ۱۰۶) در رابطه (۱ - ۱۲۲) و با توجه به تقارن ماتریس u^* نسبت به گره میانی، داریم:

$$G_{ii} = -\frac{2}{2\pi G} \int_0^{0.5l} \ln r dr \quad (141 - 1)$$

از آنجا که انتگرال در $r = 0$ نامحدود است، مرز پایینی انتگرال به عنوان ε انتخاب می شود که در آن $\varepsilon \rightarrow 0$ است.

$$G_{ii} = -\frac{1}{\pi G} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{0.5l} \ln r dr \quad (142 - 1)$$

انتگرال گیری جزء به جزء به رابطه زیر منجر می شود:

$$G_{ii} = -\frac{1}{\pi G} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (r \ln r - r) \Big|_{\varepsilon}^{0.5l} = \frac{1}{2\pi G} l \left(\ln \frac{2}{l} + 1 \right) \quad (143 - 1)$$

۱. مبانی تحلیل عددی ۴۷

وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، مقدار $\varepsilon \ln \varepsilon$ به سمت صفر میل می‌کند.
ضریب بار در رابطه (۱ - ۱۲۳) به شرح محاسبه می‌شود:

$$\bar{P}_{ij} = p \int_{S_j} v_{,n}^* ds \quad (1 - 144)$$

برای حالتی که نقطه i در جزء مرزی j قرار نمی‌گیرد (شکل ۱ - ۱۳) روند استخراج روابط به صورت رابطه‌های (۱ - ۱۳۱) و (۱ - ۱۳۳) است.

$$v_{,n}^* = v_{,r}^* r_{,n} = v_{,r}^* \frac{d}{r} \quad (1 - 145)$$

جایگزینی رابطه (۱ - ۱۱۸) در رابطه (۱ - ۱۴۴) به رابطه زیر می‌انجامد:

$$v_{,n}^* = \frac{d}{8\pi G} \left(1 + 2 \ln \frac{1}{r} \right) \quad (1 - 146)$$

جایگزینی رابطه (۱ - ۱۴۶) در رابطه (۱ - ۱۴۴) به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\bar{P}_{ij} = \frac{dp}{8\pi G} \int_{S_j} ds + \frac{dp}{4\pi G} \int_{S_j} \ln \frac{1}{r} ds \quad (1 - 147)$$

که بعد از جایگزینی رابطه (۱ - ۱۳۵) داریم:

$$\bar{P}_{ij} = \frac{dip}{8\pi G} + \frac{d^2 p}{4\pi G} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln \frac{\cos \theta}{d} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (1 - 148)$$

انتگرال در رابطه (۱ - ۱۴۸) شبیه به رابطه (۱ - ۱۳۸) است، بنابراین با مشخص نمودن G_{ij} در رابطه (۱ - ۱۳۹) داریم:

$$\bar{P}_{ij} = \frac{dip}{8\pi G} + \frac{dp}{2} G_{ij} \quad (1 - 149)$$

در حالتی که نقطه i روی جزء مرزی $j = i$ قرار دارد، طی روندی مشابه رابطه (۱ - ۱۴۱) به رابطه (۱ - ۱۱۸) منجر می‌شود.

$$\bar{P}_{ii} = 2p \int_0^{0.5l} v_{,r}^* dr = \frac{p}{4\pi G} \int_0^{0.5l} r dr - \frac{p}{2\pi G} \int_0^{0.5l} r \ln r dr \quad (1 - 150)$$

با

$$\int_0^{0.5l} r \ln r dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{0.5l} r \ln r dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_{\varepsilon}^{0.5l} - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{0.5l} r dr \right) = \frac{l^2}{8} \ln \frac{l}{2} - \frac{l^2}{16} \quad (1-151)$$

رابطه (۱-۱۵۰) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\bar{P}_{ii} = \frac{l^2 p}{16\pi G} \left(\ln \frac{2}{l} + 1 \right) \quad (1-152)$$

یا با استفاده از رابطه (۱-۱۴۳) خواهیم داشت:

$$\bar{P}_{ii} = \frac{lp}{8} G_{ii} \quad (1-153)$$

گام پنجم: حل معادلات کلی

در حالت کلی معادلات نامتقارن با داشتن تمام درایه‌ها (رابطه (۱-۱۲۵) یا (۱-۱۲۸))، بیانگر مدل کلی با اعمال شرایط مرزی حل می‌شوند. این موضوع نتایج را به N جابه‌جایی گره‌ای و کشش سطحی گره‌ای برای تمام گره‌ها سوق می‌دهد. سپس تمامی N جابه‌جایی گره‌ای $\{u\}$ و N کشش سطحی $\{\tau_n\}$ بر روی مرزها معلوم می‌شوند.

گام ششم: محاسبه نتایج مکمل

با معلوم شدن تمامی N جابه‌جایی گره‌ای $\{u\}$ و N کشش سطحی $\{\tau_n\}$ بر روی مرز، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در داخل جزء قابل محاسبه می‌شود. برای مثال، جابه‌جایی نقطه i درون حوزه از رابطه (۱-۹۷) تبعیت می‌کند. برای بار ثابت p ، جایگذاری در رابطه (۱-۱۱۵) و تفکیک به N جزء مرزی ثابت، این رابطه به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} \tau_n^* dS \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} u^* dS \right) \tau_{nj} + \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} v_n^* dS \right) p \quad (1-154)$$

۱. مبانی تحلیل عددی ۴۹

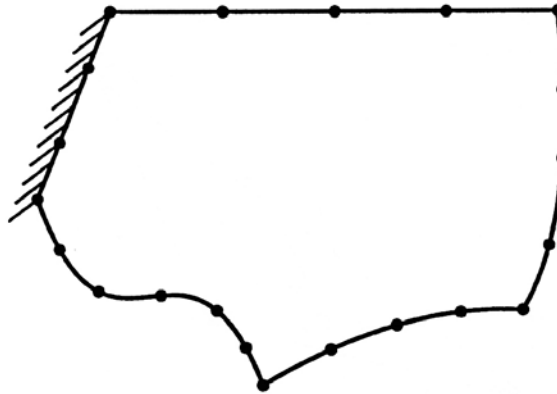
جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۱۲۱)، (۱ - ۱۲۲) و (۱ - ۱۲۳) نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_i = - \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N G_{ij} \tau_{nj} + \sum_{j=1}^N \bar{P}_{ij} \quad (1 - 155)$$

حل اساسی برای u^* و τ_n^* با بارهای متمرکز وارد شده به نقطه داخلی i مطابقت دارد. $\{u\}$ و $\{\tau_n\}$ معلوم هستند.

برای هر نقطه داخلی متفاوت i ، باید مجدداً u^* ، τ_n^* و v^* محاسبه شده و ضرایب H_{ij} و G_{ij} همانند \bar{P}_{ij} از نو برقرار شود. در این روند، $\{u\}$ و $\{\tau_n\}$ تغییری نمی‌کنند. به عنوان مثال، گوه شکل ۱ - ۳ تشریح شده در بند ۱ - ۲ را در نظر بگیرید که نتایج زیر برای آن محاسبه شده است. تنش برشی ثابت (کشش سطحی) بر روی لبه ۲ - ۱، $\tau_n = \tau_x$ که در واقع τ_{n2} می‌باشد، از روی رابطه حل شده (۱ - ۱۲۸) محاسبه می‌گردد و برابر است با $1.807(G/r_0)\bar{u} - 0.134r_0p$. جابه‌جایی در نقطه p با استفاده از رابطه (۱ - ۱۵۵) محاسبه می‌گردد و برابر است با $0.026\bar{u} + 0.008(r_0^2/G)p$. مشخصات روش اجزای مرزی را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- تنها مرز به صورت فضایی جداسازی شده است (شکل ۱ - ۱۴)، که منجر به کاهش بعد فضایی به مقدار یک گشته و باعث می‌گردد که نسبت به روش اجزای محدود، از تعداد درجات آزادی کاسته شده و در نتیجه تلاش محاسباتی و عملیات آماده‌سازی داده‌ها نیز تقلیل یابد. برای بارهای حجمی خاص، هیچ‌گونه جداسازی حوزه مورد نیاز نمی‌باشد.
- در این روش به یک حل بنیادی که معادله دیفرانسیل حاکم را به طور دقیق ارضا نماید، نیاز است که این حل بنیادی در هر مسئله متفاوت می‌باشد. این حل تحلیلی که اغلب بسیار پیچیده است، تکین بودن پاسخ‌ها را منجر می‌گردد.
- در هر جزء مرزی، توابع شکل در قلب چندجمله‌ای، جابه‌جایی‌ها و کشش‌های سطحی را در درون جزء به دست می‌دهند.
- با حل بنیادی و لحاظ نمودن تکین‌ها، به‌انتگرال فضایی چندجمله‌ای‌ها نیاز است.
- معادلات حاصل در سیستم کلی، کاملاً متراکم و نامتقارن هستند.



شکل ۱-۱۴ جداسازی فضایی مرزها در روش اجزای مرزی

- در معادلات انتگرال مرزی گسسته سیستم کلی، جابه‌جایی‌ها و کشش‌های سطحی بر روی مرز، به‌طور مستقل به‌عنوان مجهول ظاهر شده و با روند مشابهی محاسبه می‌شوند.
- خطاها به‌تقریب مقادیر مرزی محدود هستند.
- نتایج بیشتر در درون حوزه به‌صورت انتخابی تعیین می‌شوند.
- روش اجزای مرزی برای مصالح ناهمگن و ناهمسان مناسب نیست.
- در بررسی محیط بدون مرزی مانند خاک زیر سد در شکل ۱-۱، روش اجزای مرزی، شرایط در بی‌نهایت را به‌دلیل وجود این شرایط در حل بنیادی، با دقت زیاد مدل‌سازی می‌کند.

به‌طور کلی روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی با هرچه کوچکتر شدن اندازه جزء به‌حل دقیق نزدیک (همگرا) می‌شوند. این همگرایی در نزدیکی یک نقطهٔ تکین تنش، همان‌طور که در مباحث مکانیک شکست حول نوک ترک رخ می‌دهد، آهسته است. (برای مثال نوک ترک K را در شکل ۱-۱ ببینید) است. این موضوع به‌دلیل استفاده از چندجمله‌ای‌ها برای درون‌یابی جابه‌جایی‌ها در هر دو روش است. برای دستیابی به‌دقت بالا، به‌تکنیک‌های ویژه و تعداد زیاد اجزا نیاز است.

۱-۶ نگاهی اجمالی به روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده

پس از حل مسئله گوه (شکل ۱-۳) به روش اجزای محدود (بند ۱-۴، شکل ۱-۵) و به روش اجزای مرزی (بند ۱-۵، شکل ۱-۱۲)، مناسب است که این مسئله با به کارگیری روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده نیز حل شود. در این مرحله از بیان اجمالی موضوع، به فهم کامل نیازی نیست. این مسئله تنها برای برانگیختن توجه خواننده ارائه شده است. این روش اجزای مرزی، مرز محیط را تقسیم بندی می کند. در این راستا یک جزء خطی (خط) بین نقاط ۱ و ۲ در شکل ۱-۱۵ برای حالت دوبعدی نشان داده شده است. برای اینکه بتوان شرایط مرزی را به طرز ساده ای رابطه سازی کرد، سیستم مختصات جدید ξ, η با عنوان مختصات مرز مقیاس شده، معرفی می شود. مرکز آن O ، مرکز مقیاس شده که برای محیط مرزدار به طور کامل در درون حوزه قرار گرفته و با دستگاه مختصات کارتزین x و y مطابقت دارد. محور شعاعی بدون بعد ξ از مرکز $\xi = 0$ شروع شده و تا مرز که در آن به $\xi = 1$ بی بعد شده، ادامه می یابد، بنابراین حوزه مرزدار به وسیله $0 \leq \xi \leq 1$ پوشش داده می شود. محور η ، بر امتداد محیطی مرز قرار دارد ($\eta = -1$ در گره ۱، $\eta = +1$ در گره ۲) و در آن مختصات گره ای به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (1-156)$$

توابع شکل نگاشت نیز به شکل زیر می باشد:

$$[N(\eta)] = [N_1(\eta)N_2(\eta)] = \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \frac{1}{2}(1+\eta) \right] \quad (1-157)$$

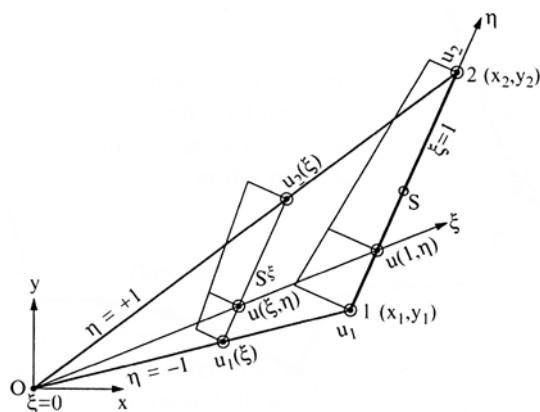
مختصات x و y بر روی جزء خط روی مرز برابر $\{x\} = \bar{x} + \frac{1}{2}\Delta_x \eta$ و $[N(\eta)]\{y\} = \bar{y} + \frac{1}{2}\Delta_y \eta$

$$[N(\eta)]\{y\} = \bar{y} + \frac{1}{2}\Delta_y \eta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad (1-158)$$

$$\Delta_x = x_2 - x_1 \quad \Delta_y = y_2 - y_1 \quad (1-159)$$

انتقال مرز مقیاس شده، هر نقطه ای درون حوزه با مختصات x و y را به صورت زیر به نقطه متناظر در جزء خطی مرتبط می نماید.



شکل ۱-۱۵ اجزای محدود مرزی مقیاس شده با جابه‌جایی.

(Reprinted from *Computers and Structures*, Vol. 78, Wolf and Song, 'The scaled boundary finite element method-a primer: derivations', pp. 191-210, © (2000), with permission from Elsevier Science)

$$\begin{aligned} x &= \xi[N(\eta)]\{x\} \\ y &= \xi[N(\eta)]\{y\} \end{aligned} \quad (۱۶۰ - ۱)$$

رابطه (۱ - ۱۶۰) انتقال از مختصات کارتیزین x و y به مختصات مرزی مقیاس شده ξ, η را بیان می‌کند. این رابطه که توصیف‌کننده مقیاس نمودن مرز است، منجر به نام‌گذاری این روش شده است.

مشتق‌های فضایی در هر دو دستگاه مختصاتی به شکل زیر با هم در ارتباط هستند

(پیوست الف، رابطه‌های (الف - ۷) و (الف - ۸)).

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (۱۶۱ - ۱)$$

که پس از جایگذاری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \{b^1\} \frac{\partial}{\partial \xi} + \{b^2\} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (۱۶۲ - ۱)$$

که در آن

$$\{b^1\} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} [N(\eta)]_{,\eta}\{y\} \\ -[N(\eta)]_{,\eta}\{x\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_1y_2 - x_2y_1} \begin{Bmatrix} \Delta_y \\ -\Delta_x \end{Bmatrix} \quad (۱ - ۱۶۳ - الف)$$

$$\{b^2\} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} -[N(\eta)]\{y\} \\ [N(\eta)]\{x\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_1y_2 - x_2y_1} \begin{Bmatrix} -2\bar{y} - \Delta_y\eta \\ 2\bar{x} + \Delta_x\eta \end{Bmatrix} \quad (۱ - ۱۶۳ - ب)$$

با در نظر گرفتن

$$|J| = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \quad (۱ - ۱۶۴)$$

سطح بسیار کوچک dV از حوزه به صورت زیر محاسبه می شود (توضیحات پیوست الف در ارتباط با رابطه (الف - ۹) با تعریف متفاوت $|J|$ در رابطه (الف - ۸) را ببینید. همچنین با توجه به ملاحظات هندسی نیز این رابطه قابل محاسبه است.)

$$dV = \xi |J| d\xi d\eta \quad (۱ - ۱۶۵)$$

و طول خیلی کوچک dS بر روی جزء خطی $\xi = 1$ به ترتیب زیر محاسبه می شود:

$$dS = \sqrt{([N(\eta)]_{,\eta}\{x\})^2 + ([N(\eta)]_{,\eta}\{y\})^2} d\eta = \Delta_s d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} d\eta \quad (۱ - ۱۶۶)$$

جابه جایی جزء خطی بر روی $\xi = 1$ با استفاده از توابع نگاشت (رابطه (۱ - ۱۵۷) به عنوان توابع شکل $[N(\eta)]$ درونیابی شده، بنابراین جداسازی محدود به مرز می شود. بدیهی است که تابع شکل یکسانی برای تمام خطها با ξ ثابت، اعمال شود.

$$u(\xi, \eta) = [N(\eta)]\{u(\xi)\} \quad (۱ - ۱۶۷)$$

که در آن جابه جاییها بر روی خطهایی که به ترتیب از O و گره های ۱ و ۲ می گذرند (شکل (۱ - ۱۵)، به صورت زیر است:

$$\{u(\xi)\} = \begin{Bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{Bmatrix} \quad (۱ - ۱۶۸)$$

رابطه (۱ - ۱۶۷) که در مختصات مرزی مقیاس شده ξ, η رابطه‌سازی شده است، رابطه کلیدی می‌باشد. همان‌گونه که در ادامه مشخص می‌گردد، تابع $\{u(\xi)\}$ از متغیر ξ به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود. با استفاده از همان توابع شکل $[N(\eta)]$ برای مرز، جابه‌جایی $u(\xi, \eta)$ نیز برای هر ξ محاسبه می‌شود. این رابطه می‌تواند به‌عنوان تعمیمی از روش جداسازی متغیرها با درون‌یابی مقادیر $\{u(\xi)\}$ در امتداد محیطی η ، تفسیر گردد. قابل توجه است که توابع شکل $[N(\eta)]$ تابعی است فقط از یک متغیر η که در تضاد با روش مورد استفاده در اجزای محدود (رابطه (۱ - ۱۵۲)) می‌باشد.

$$\{u(\xi, \eta)\} = [N(\xi, \eta)]\{u\} \quad (۱ - ۱۶۹)$$

که در آن $\{u\}$ جابه‌جایی‌ها در گره‌های مشخص در حوزه است. رابطه (۱ - ۱۶۷) به همراه تعریف انتقال مرزی مقیاس شده طبق رابطه (۱ - ۱۶۰)، اساس روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده را تشکیل می‌دهند. تنش‌های برشی $\{\tau\}$ در رابطه (۱ - ۳) مشخص شده‌اند. بیان مشتق‌ها بر حسب x و y مشابه با رابطه (۱ - ۱۶۱) و جایگذاری رابطه (۱ - ۱۶۷) رابطه زیر را به دست می‌دهد:

$$\{\tau\} = G \left([B^1]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2]\{u(\xi)\} \right) \quad (۱ - ۱۷۰)$$

که در آن معادلات (۱ - ۱۶۲) و (۱ - ۱۵۷) به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$[B^1] = \{b^1\}[N] = \frac{1}{2(x_1y_2 - x_2y_1)} \begin{bmatrix} \Delta_y(1 - \eta) & \Delta_y(1 + \eta) \\ -\Delta_x(1 - \eta) & -\Delta_x(1 + \eta) \end{bmatrix} \quad (\text{الف} - ۱۷۱ - ۱)$$

$$[B^2] = \{b^2\}[N]_{,\eta} = \frac{1}{2(x_1y_2 - x_2y_1)} \begin{bmatrix} 2\bar{y} + \Delta_y\eta & -2\bar{y} - \Delta_y\eta \\ -2\bar{x} - \Delta_x\eta & 2\bar{x} + \Delta_x\eta \end{bmatrix} \quad (\text{ب} - ۱۷۱ - ۱)$$

$[B^1]$ و $[B^2]$ مستقل از ξ هستند. عبارت سمت راست معادله (۱ - ۱۷۰) بدون در نظر گرفتن عامل G ، کرنش برشی را بیان می‌کند. به‌عنوان نقطه شروع استخراج روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده، عبارت کار مجازی مشابه اجزای محدود و رابطه (۱ - ۵۳) می‌تواند انتخاب گردد. روش کاری مجازی با در نظر گرفتن جابه‌جایی مجازی w به صورت زیر بیان می‌شود:

۱. مبانی تحلیل عددی ۵۵

$$\int_V [w_{,x} w_{,y}]^T \{\tau\} dV = \int_V w^T p dV + \int_S w^T \tau_n dS \quad (1 - 172)$$

باید در نظر گرفت که $w_{,x}$ و $w_{,y}$ کرنش‌های مجازی‌اند. عبارت سمت چپ رابطه بیانگر کار داخلی ایجادشده (انرژی کرنش ارتجاعی) و عبارت سمت راست، بیانگر کار خارجی انجام شده به وسیله بارهای حجمی و کشش سطحی τ_n بر روی مرز S می‌باشد.

انتگرال‌های رابطه (۱ - ۱۷۳) با در نظر گرفتن S به‌عنوان مرز، بر روی تمام حوزه اعمال می‌گردد. هرچند می‌توان آن را به چند زیرحوزه (گوه‌های مثلثی با رئوس O ، ۱ و ۲، اجزای خطی با مرزهای ۱ و ۲) متناظر با اجزای خطی منفرد، تقسیم نمود که سپس با هم جمع می‌شوند. برای ساده‌سازی واژه‌ها، نمادهای مشابه برای کمیت‌های معادل با اجزای منفرد و همچنین کمیت‌های معادل با حوزه کلی که شامل ترکیب تمام اجزا می‌باشد، استفاده شده است. در ادامه، یک جزء خطی منفرد طبق (شکل ۱ - ۱۵) بیان شده است.

به‌روش مشابه جابه‌جایی مجازی با جابه‌جایی، (رابطه (۱ - ۱۶۷)) تقسیم‌بندی شده

است.

$$w(\xi, \eta) = [N(\eta)]\{w(\xi)\} \quad (1 - 173)$$

که در آن جابه‌جایی مجازی بر روی خطوطی که از O و گره‌های ۱ و ۲ می‌گذرند، به‌شکل زیر بیان می‌شود:

$$\{w(\xi)\} = \begin{Bmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \end{Bmatrix} \quad (1 - 174)$$

مشابه با رابطه (۱ - ۱۷۰) کرنش‌های مجازی برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [B^1]\{w(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^2]\{w(\xi)\} \quad (1 - 175)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۱ - ۱۷۵)، (۱ - ۱۷۰) و (۱ - ۱۶۵) در سمت چپ رابطه (۱ - ۱۷۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \int_V [w_{,x} w_{,y}]^T \{\tau\} dV = & \\
 \int_0^1 \{w(\xi)\}^T_{, \xi} \int_{-1}^{+1} [B^1]^T G[B^1] |J| d\eta \xi \{u(\xi)\}_{, \xi} d\xi & \\
 + \int_0^1 \{w(\xi)\}^T_{, \xi} \int_{-1}^{+1} [B^1]^T G[B^2] |J| d\eta \{u(\xi)\} d\xi & \quad (176 - 1) \\
 + \int_0^1 \{w(\xi)\}^T \int_{-1}^{+1} [B^2]^T G[B^1] |J| d\eta \{u(\xi)\}_{, \xi} d\xi & \\
 + \int_0^1 \{w(\xi)\}^T \int_{-1}^{+1} [B^2]^T G[B^2] |J| d\eta \xi \{u(\xi)\} d\xi &
 \end{aligned}$$

ماتریس ضرایب که دارای معادلات انتگرالی بر روی جزء خطی ۲ - ۱ و تنها بر روی مرز می‌باشند، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$[E^0] = \int_{-1}^{+1} [B^1]^T G[B^1] |J| d\eta = G \frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{6(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (177 - 1 \text{ الف})$$

$$\begin{aligned}
 [E^1] = \int_{-1}^{+1} [B^2]^T G[B^1] |J| d\eta = G \frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{12(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 - G \frac{\bar{x} \Delta_x + \bar{y} \Delta_y}{2(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (177 - 1 \text{ ب})
 \end{aligned}$$

$$[E^2] = \int_{-1}^{+1} [B^2]^T G[B^2] |J| d\eta = G \frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + 12(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{12(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (177 - 1 \text{ پ})$$

برای حذف مشتق ξ ، $\{w(\xi)\}$ انتگرال گیری جزء به جزء نسبت به متغیر ξ اعمال شده است.

۱. مبانی تحلیل عددی ۵۷

$$\int_0^1 \{w(\xi)\}^T,_{\xi} \{f(\xi)\} d\xi = \{w(\xi=1)\}^T \{f(\xi=1)\} - \int_0^1 \{w(\xi)\}^T \{f(\xi)\},_{\xi} d\xi \quad (178-1)$$

با به کارگیری رابطه (۱۷۸ - ۱) به بخش اول و دوم طرف راست رابطه (۱۷۶ - ۱)، معادله زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \{w(\xi=1)\}^T [E^0] \{u(\xi=1)\},_{\xi} - \int_0^1 \{w(\xi)\}^T [E^0] \xi \{u(\xi)\},_{\xi\xi} d\xi \\ & - \int_0^1 \{w(\xi)\}^T [E^0] \{u(\xi)\},_{\xi} d\xi + \{w(\xi=1)\}^T [E^1]^T \{u(\xi=1)\} \\ & - \int_0^1 \{w(\xi)\}^T [E^1]^T \{u(\xi)\},_{\xi} d\xi + \int_0^1 \{w(\xi)\}^T [E^1] \{u(\xi)\},_{\xi} d\xi \\ & + \int_0^1 \{w(\xi)\}^T [E^2] \frac{1}{\xi} \{u(\xi)\} d\xi \end{aligned} \quad (179-1)$$

سمت راست رابطه (۱۷۲ - ۱)، پس از جایگذاری رابطه‌های (۱۷۳ - ۱)، (۱۶۵ - ۱) و (۱۶۶ - ۱) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} & \int_V w^T p dV + \int_S w^T \tau_n dS \\ & = \int_0^1 \{w(\xi)\}^T \xi \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T p |J| d\eta d\xi + \{w(\xi=1)\}^T \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T \tau_n \Delta_s d\eta \end{aligned} \quad (180-1)$$

با به کارگیری سهم بار حجمی و کشش سطحی بر روی مرزها به صورت زیر:

$$\{F^b\} = \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T p |J| d\eta \quad (الف - ۱۸۱ - ۱)$$

$$\{Q\} = \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T \tau_n \Delta_s d\eta \quad (ب - ۱۸۱ - ۱)$$

در رابطه (۱ - ۱۸۰) خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \{w(\xi)\}^T \xi \{F^b\} d\xi + \{w(\xi = 1)\}^T \{Q\} \quad (1 - 182)$$

با تساوی قرار دادن سمت چپ رابطه (۱ - ۱۷۹) با سمت راست رابطه (۱ - ۱۸۲) و ضرب نمودن در ξ ، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \{w(\xi = 1)\}^T \xi \{[E^0] \{u(\xi = 1)\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u(\xi = 1)\} - \{Q\}\} \\ & + \{w(\xi)\}^T \int_0^1 (-[E^0] \xi^2 \{u(\xi)\}_{,\xi\xi} - ([E^0] - [E^1] + [E^1]^T) \xi \{u(\xi)\}_{,\xi} \\ & + [E^2] \{u(\xi)\} - \xi^2 \{F^b\}) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (1 - 183)$$

با توجه به اینکه جابه‌جایی‌های مجازی $\{w(\xi = 1)\}$ دلخواه می‌باشند، ماتریس ضرایب مربوط به بخش اول باید حذف گردد و نتیجه آن رابطه زیر خواهد بود:

$$[E^0] \{u(\xi = 1)\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u(\xi = 1)\} - \{Q\} = 0 \quad (1 - 184)$$

که در واقع نیروهای گره‌ای داخلی بر روی مرز $(\xi = 1)$ را به‌عنوان تابعی از $\{u(\xi = 1)\}_{,\xi}$ و $\{u(\xi = 1)\}$ دو عبارت ابتدایی در رابطه (۱ - ۱۸۴) تعریف نموده و معادله تعادل را براساس بار گره‌ای ناشی از کشش سطحی $\{Q\}$ بیان می‌کند. با توجه به اینکه جابه‌جایی‌های مجازی $\{w(\xi)\}$ نیز دلخواه می‌باشند، ماتریس ضرایب که دارای معادله انتگرالی بر روی ξ می‌باشد، باید حذف گردد. با قرار دادن معادله انتگرالی برابر با صفر به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & [E^0] \xi^2 \{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + ([E^0] - [E^1] + [E^1]^T) \xi \{u(\xi)\}_{,\xi} \\ & - [E^2] \{u(\xi)\} + \xi^2 \{F^b\} = 0 \end{aligned} \quad (1 - 185)$$

این نکته قابل ذکر است که ماتریس‌های ضرایب $[E^0], [E^1], [E^2]$ مستقل از ξ بوده و تنها انتگرال‌گیری بر روی جزء خطی $(\xi = 1)$ را شامل می‌شوند. عبارات $[E^0], [E^1], [E^2]$ رابطه (۱ - ۱۷۷) شبیه عبارات به‌کار گرفته شده در ماتریس سختی استاتیکی اجزای محدود خطی استاندارد می‌باشد. تناسب مشابهی نیز برای بارهای حجمی $\{F^b\}$ (رابطه (۱ - ۱۸۱ - الف)) وجود دارد.

۱. مبانی تحلیل عددی ۵۹

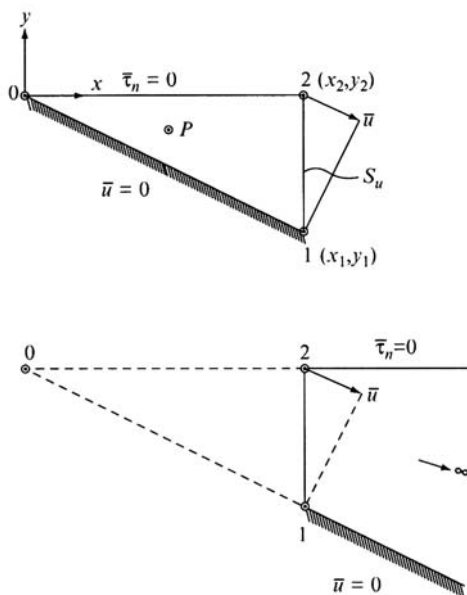
معادله (۱ - ۱۸۵) به حوزه اجزای خطی منفرد، یعنی گوه مثلثی اعمال می شود (شکل ۱ - ۱۵). برای مدل کردن کل حوزه، روش سرهم‌بندی مشابه با روش اجزای محدود (گام ۴ در بند ۱ - ۴)، ارائه شده است. همان گونه که اشاره شد، نمادهای مشابهی برای ماتریس‌های ضرایب سرهم‌بندی شده، جابه‌جایی‌های سرهم‌بندی شده و بارهای گره‌ای سرهم‌بندی شده، استفاده می شود. برای نمونه $\{u(\xi)\}$ ، بیانگر جابه‌جایی‌ها در امتداد تمام خطوطی است که از مرکز مقیاس شده و گره‌های روی مرز می گذرد. به‌طور قراردادی، رابطه (۱ - ۱۸۵) همچنین سیستم سرهم‌بندی شده کلی را بیان می کند.

رابطه (۱ - ۱۸۵) بیانگر معادله اجزای محدود مرزی مقیاس شده در جابه‌جایی می باشد. در واقع یک سیستم با معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم غیرهمگن خطی برای جابه‌جایی‌ها $\{u(\xi)\}$ ، با مختصات شعاعی (بدون بعد) ξ ، به‌عنوان متغیر مستقل است. در این عبارت ضرایب ثابت نمی‌باشند، ولی چندجمله‌ای‌هایی با توان و مرتبه‌های مشتق مشابه $\{u(\xi)\}$ ، ξ ، $\xi\{u(\xi)\}$ ، $\xi^2\{u(\xi)\}$ می‌باشند. عبارت بار حجمی غیرهمگن به یک حل مشخص هدایت می شود که می تواند به حل همگن برای این سیستم خطی اضافه گردد. معادله‌های دیفرانسیل اولر - کوشی ذکر شده، به راحتی و به صورت تحلیلی می توانند حل شوند. بنابراین روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده، روشی براساس اجزای محدود عددی در امتداد محیطی η و یک روش تحلیلی در امتداد شعاعی ξ است.

برای بیان روش، مسئله گوه تعریف شده در بند ۱ - ۲ به‌عنوان یک مثال کاربردی حل شده است (بالای شکل ۱ - ۱۶). وجه ۲ - ۱، به یک جزء خطی با دو گره تقسیم‌بندی و مرکز مقیاس شده در O ، نقطه تقاطع دو وجه دیگر انتخاب شده است. همان گونه که در ادامه در فصل ۳ توضیح داده خواهد شد، خطوط مستقیم مرز که از مرکز مقیاس شده عبور می کنند، لازم نیست تقسیم‌بندی شوند. مختصات بدون بعد شعاعی $\xi=0$ در O و $\xi=1$ در وجه ۲ - ۱، به کار گرفته شده و جابه‌جایی خطی ذکر شده بر روی وجه ۲ - ۱ با تابع شکل سازگاری دارد که منجر به $u_1 = u(\xi=1, \eta=-1) = 0$ ، $u_2 = u(\xi=1, \eta=+1) = \bar{u}$ می شود.

بعد از اعمال شرایط مرزی جابه‌جایی $u_1(\xi) = 0$ ، معادله جزء محدود مرزی مقیاس شده در جابه‌جایی طبق رابطه (۱ - ۱۸۵) با متغیر $u_2(\xi)$ برابر با رابطه زیر می شود:

$$E^0 \xi^2 u_2(\xi),_{\xi\xi} + E^0 \xi u_2(\xi),_{\xi} - E^2 u_2(\xi) + \xi^2 F_2^b = 0 \quad (1 - 186)$$



شکل ۱- ۱۶ گوه مثلثی و گوه دوزنقه‌ای نیمه بی‌نهایت مربوط به آن.

ضرایب برابر هستند با (معادله ۱- ۱۷۷ - الف و ۱- ۱۷۷ - ب):

$$E^0 = G \frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{3(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \quad (1- ۱۸۷ - الف)$$

$$E^2 = G \frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + 12(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{12(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \quad (1- ۱۸۷ - ب)$$

بار حجمی ثابت p به (رابطه ۱- ۱۸۱ - الف)) منجر می‌شود:

$$F_2^b = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) p \quad (1- ۱۸۸)$$

با توجه به اینکه تنها یک درجه آزادی بر روی مرز باقی می‌ماند، رابطه (۱- ۱۸۶) به جای دستگامی از معادلات دیفرانسیل، یک معادله دیفرانسیل اسکالر است و اشاره شود که ضریب E^1 در عبارت ظاهر نمی‌شود.

رابطه (۱- ۱۸۶) یک معادله دیفرانسیل اولر - کوشی می‌باشد که به‌سادگی به‌روش

۱. مبانی تحلیل عددی ۶۱

تحلیلی قابل حل است. در ابتدا، معادله همگن، یعنی معادله برای بار حجمی صفر نشان داده شده است. با جایگذاری

$$u_2(\xi) = \xi^\alpha \quad (189 - 1)$$

با ضریب مجهول α در رابطه (۱۸۶ - ۱) و در نظر گرفتن $F_2^b = 0$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$E^0 \alpha^2 - E^2 = 0 \quad (190 - 1)$$

به این معنا که

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{E^2}{E^0}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{12(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}} \quad (191 - 1)$$

حل کلی شکل همگن رابطه (۱۸۶ - ۱) به صورت زیر است:

$$u_2(\xi) = c_1 \xi^{\alpha_1} + c_2 \xi^{\alpha_2} \quad (192 - 1)$$

که در آن c_1 و c_2 ضرایب ثابت انتگرالی هستند.

ثانیاً در شرایط حضور بارهای حجمی حل ویژه‌ای برای معادله غیرهمگن به شکل

ξ^β ارائه می‌گردد. با جایگذاری در رابطه (۱۸۶ - ۱)، $\beta = 2$ نتیجه شده و:

$$c_3 = -\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2(4E^0 - E^2)} p \quad (193 - 1)$$

حل کلی، که با برهم‌نهی حل همگن و حل ویژه به دست می‌آید، برابر است با:

$$u_2(\xi) = c_1 \xi^{\alpha_1} + c_2 \xi^{\alpha_2} - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2(4E^0 - E^2)} p \xi^2 \quad (194 - 1)$$

برای گوه، جابه‌جایی در نقطه $O(\xi = 0)$ باید محدود مانده و با $\alpha_2 < 0$ رابطه (۱۹۱ - ۱)،

c_2 باید حذف گردد، که نتیجه آن رابطه زیر خواهد بود:

$$u_2(\xi) = c \xi^{\alpha_1} - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2(4E^0 - E^2)} p \xi^2 \quad (195 - 1)$$

شرط مرزی $u_2(\xi = 1) = \bar{u}$ به رابطه زیر می‌انجامد:

$$c = \bar{u} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2(4E^0 - E^2)} p \quad (196 - 1)$$

که منجر به رابطه زیر می شود:

$$u_2(\xi) = \bar{u}\xi^{\alpha_1} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2(4E^0 - E^2)} p(\xi^{\alpha_1} - \xi^2) \quad (197 - 1)$$

جابه‌جایی در گوه، با $u_1(\xi) = 0$ از رابطه (۱ - ۱۶۷) با رابطه (۱ - ۱۵۷) به صورت زیر تبعیت می کند:

$$u(\xi, \eta) = N_2(\eta)u_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \eta)u_2(\xi) \quad (198 - 1)$$

تنش برشی τ_x از رابطه (۱ - ۱۷۰) به شکل زیر به دست می آید:

$$\tau_x(\xi, \eta) = G \left(B^1 u_2(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} B^2 u_2(\xi) \right) \quad (199 - 1)$$

با داشتن رابطه (۱ - ۱۷۱)

$$B_1 = \frac{\Delta_y}{2(x_1y_2 - x_2y_1)} (1 + \eta) \quad (\text{الف} - 200 - 1)$$

$$B_2 = \frac{1}{2(x_1y_2 - x_2y_1)} (-2\bar{y} - \Delta_y \eta) \quad (\text{ب} - 200 - 1)$$

برای مقادیر گوه مثلثی که در بخش ۱ - ۲ شرح داده شد، $\alpha_1 = 4$ است. جابه‌جایی در نقطه P با در نظر گرفتن $\xi = 0.5, \eta = 0$ برابر است با: $0.031\bar{u} + 0.012(r_0^2/G)p$. در واقع، معادله اجزای محدود مرزی مقیاس شده برای جابه‌جایی رابطه (۱ - ۱۸۶)، همچنین برای تحلیل گوه نیمه محدود «ذوزنقه‌ای» (پایین شکل ۱ - ۱۶) به کار می رود. وجه $1 - \infty$ و $2 - \infty$ به ترتیب ثابت و آزاد هستند. مجدداً یک تغییر خطی جابه‌جایی در وجه ۲ - ۱ ارائه شده است. برای محیط نامحدود، $1 < \xi < \infty$ به کار می رود. برای بار حجمی صفرشونده، حل کلی برای جابه‌جایی به وسیله رابطه (۱ - ۱۹۲) مشخص می شود. شرط مرزی در بی نهایت که باعث اعمال جابه‌جایی محدود می شود، $c_1 = 0$ را نتیجه می دهد. با اعمال رابطه $u_2(\xi=1) = \bar{u}$ جابه‌جایی حوزه نامحدود برابر رابطه زیر می شود:

$$u_2(\xi) = \bar{u}\xi^{\alpha_2} \quad (201 - 1)$$

برای مثال خاص، $\alpha_2 = -4$ اعمال می شود.

۱. مبانی تحلیل عددی ۶۳

اگرچه استخراج روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده در این بخش بسیار ساده و معمولی بیان شد، برخی از خصوصیات این روش خلاقانه به شرح زیر می‌باشد:

- روش مورد نظر نیمه‌تحلیلی است، که معادله دیفرانسیل جزئی را با استفاده از کار مجازی، در اجزای محدود و در امتداد محیطی، به معادله دیفرانسیل معمولی با مختصات شعاعی به‌عنوان متغیر مستقل تبدیل می‌کند و در نهایت می‌تواند به‌صورت تحلیلی حل گردد.

- تنها مرز محیط به‌صورت فضایی گسسته می‌شود که نتیجه آن کاهش جداسازی فضایی به‌اندازه واحد می‌باشد. ولی در تضاد با روش اجزای مرزی استاندارد، هیچ حل بنیادی لازم نبوده و انتگرال‌های تکین حاصل نمی‌شود.

- حل تحلیلی در امتداد شعاعی این اجازه را می‌دهد که شرط مرزی در بی‌نهایت به‌طور کامل ارضا گردد.

روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده نوعی روش اجزای مرزی می‌باشد، اما براساس اصول اجزای محدود، که در واقع مزیت‌های هر دو روش اجزای مرزی و اجزای محدود و همچنین ویژگی‌های خاص خود را دارا می‌باشد. به‌عنوان مثال، مرزهای مستقیم مشخص که از مرکز مقیاس عبور می‌کنند گسسته نمی‌شوند. این روش خلاقانه همچنین مزایای هر دو روش عددی و تحلیلی را نیز دربر دارد.