

به نام آنکه
جان را حکمت آموخت



تحليل ارتعاشات پی: روش مقاومت مصالح

- **Disclaimer**
No responsibility is assumed by Publisher nor by the Proprietor for any injury and/or damage to persons or property as a result of any actual or alleged libellous statements, infringement of intellectual property or privacy rights, or products liability, whether resulting from negligence or otherwise, or from any use or operation of any ideas, instructions, procedures, products or methods contained in the material therein.

- **Copyright**
Copyright © 2004, John P. Wolf and Andrew J. Deeks.
All rights reserved

The right of John P. Wolf and Andrew J. Deeks to be identified as the authors of this work has been asserted in accordance with the Copyright, Designs and Patents Act 1988

No part of this publication may be reproduced in any material form (including photocopying or storing in any medium by electronic means and whether or not transiently or incidentally to some other use of this publication) without the written permission of the copyright holder except in accordance with the provisions of the Copyright, Designs and Patents Act 1988 or under the terms of a licence issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, 90 Tottenham Court Road, London, England W1T 4LP. Applications for the copyright holder's written permission to reproduce any part of this publication should be addressed to the publisher

- **Agreement**
This edition of Foundation Vibration Analysis, A Strength of Materials Approach by John Wolf and Andrew Deeks is published by arrangement with ELSEVIER LIMITED of The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5 1GB, UK.
- **Translation**
This translation was undertaken by Dr. Sassan Mohasseb, SMTEAM GmbH, CH-8706 Meilen, Switzerland.

ISBN 0 7506 6164 X

تحليل ارتعاشات پی: روش مقاومت مصالح

تألیف:

John P. Wolf

Andrew J. Deeks

ترجمه و تدوین:

ساسان محاسب

سرشناسه	: ولف، جان پی، ۱۹۳۸ - م Wolf, John P.
عنوان و نام پدیدآورنده	: تحلیل ارتعاشات پی: روش مقاومت مصالح/ تألیف: [جان. پی. ولف، اندرو جی. دیکس]؛ ترجمه و تدوین: ساسان محاسب.
مشخصات نشر	: تهران: تمثیل، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	: ق، ۳۴۴ ص.
شابک	: ۹۷۸ - ۹۶۴ - ۲۸۹۰ - ۲۱ - ۷ ISBN: 978-964-2890-21-7
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا.
یادداشت	: عنوان اصلی: Foundation vibration analysis: a strength-of-materials approach, 2004
موضوع	: پی‌سازی -- ارتعاش.
موضوع	: مقاومت مصالح
شناسه افزوده	: دیکس، اندرو ج.
شناسه افزوده	: Deeks, Andrew J.
شناسه افزوده	: محاسب، ساسان، ۱۳۳۵ - ، مترجم.
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۰ ن ۳ و ۸ / TA ۷۷۵
رده‌بندی دیویی	: ۶۳۴/۱۵
شماره کتاب‌شناسی ملی	: ۲۴۸۷۱۷۰

تحلیل ارتعاشات پی:

روش مقاومت مصالح

John P. Wolf & Andrew J. Deeks

ترجمه و تدوین: ساسان محاسب

ناشر: انتشارات تمثیل

امور فنی و هنری: مهناز عزب‌دفتری

نوبت چاپ: دوم

شمارگان: ۵۰۰ نسخه

شابک: ۹۷۸ - ۹۶۴ - ۲۸۹۰ - ۲۱ - ۷

قیمت: ۱۸۰۰۰ تومان

حق چاپ برای صاحب اثر محفوظ است.

تلفن مرکز بخش: ۰۹۱۲۳۱۹۱۱۵۲ - ۰۹۳۹۳۱۹۱۱۵۲

فهرست مطالب

ز	معرفی کتاب	
ش	مقدمه مترجم	
ض	پیش درآمد	
غ	پیشگفتار	
۱	۱ - مقدمه	
۱	۱ - ۱ تعریف مسئله	
۱۱	۲ - ۱ سازماندهی متن	
۱۵	۲ - مفاهیم مدل مخروطی	
۱۶	۱ - ۲ روش‌های دقیق	
۱۸	۲ - ۲ انتشار موج در یک مخروط ناقص نیمه نامحدود همگن	
۲۷	۳ - ۲ انعکاس و انکسار موج در ناپیوستگی مصالح در یک مخروط	
۳۵	۴ - ۲ دیسک واقع بر روی سطح نیم‌فضای چندلایه	
۳۷	۵ - ۲ دیسک مدفون در نیم‌فضای چندلایه	
۴۰	۶ - ۲ پی مدفون در نیم‌فضای چندلایه	
۴۲	۷ - ۲ ویژگی‌های مدل مخروطی	
۴۵	۳ - مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون	
۴۶	۱ - ۳ مخروط‌های انتقالی	
۵۴	۲ - ۳ مخروط‌های دورانی	
۶۰	۳ - ۳ تفسیر مخروط دورانی	
۶۵	۴ - ۳ نیم‌فضای تراکم‌ناپذیر و تقریباً تراکم‌ناپذیر	
۶۶	۱ - ۴ - ۳ سرعت موج	
۶۶	۲ - ۴ - ۳ جرم محبوس	

۶۹..... پی واقع بر روی سطح نیم‌فضای همگن..... ۵ - ۳

۷۶..... مخروط‌های دوبل..... ۶ - ۳

۴ - انعکاس و انکسار موج در ناپیوستگی مصالح..... ۸۱

۸۲..... ضریب انعکاس برای مخروط انتقالی..... ۱ - ۴

۸۸..... ضریب انعکاس برای مخروط دورانی..... ۲ - ۴

۹۲..... سختی دینامیکی پی سطحی بر روی لایه واقع بر روی نیم‌فضا..... ۳ - ۴

۱۰۳..... دیسک مدفون در نیم‌فضای همگن..... ۴ - ۴

۱۰۷..... پیاده‌سازی کامپیوتری..... ۵ - ۴

۱۱۷..... معیارهای خاتمه..... ۶ - ۴

۵ - پی مدفون در یک نیم‌فضای چندلایه..... ۱۲۵

۱۲۶..... مجموعه دیسک‌های مدفون..... ۱ - ۵

۱۲۸..... انعطاف‌پذیری دینامیکی میدان آزاد..... ۲ - ۵

۱۳۰..... سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی..... ۳ - ۵

۱۳۸..... کاربرد کامپیوتری..... ۴ - ۵

۱۴۴..... مثال‌ها..... ۵ - ۵

۶ - ارزیابی دقت..... ۱۵۵

۱۵۶..... پی واقع بر روی سطح نیم‌فضای چندلایه..... ۱ - ۶

۱۶۰..... پی مدفون در نیم‌فضای چندلایه..... ۲ - ۶

۱۶۳..... تعداد زیاد قطعات مخروطی..... ۳ - ۶

۱۶۵..... فرکانس قطع..... ۴ - ۶

۱۶۷..... حالت تراکم‌ناپذیر..... ۵ - ۶

۱۶۷..... نیم‌بیضی مدفون در نیم‌فضای همگن..... ۶ - ۶

۱۷۲..... کره مدفون در فضای کامل همگن..... ۷ - ۶

۷ - کاربردهای مهندسی..... ۱۷۵

۱۷۶..... پی دستگاه واقع بر روی سطح نیم‌فضای چندلایه..... ۱ - ۷

۱۷۷..... ۱ - ۱ - ۷ بار دینامیکی دستگاه تک‌سیلندر.....

- ۱۷۸ ۲ - ۱ - ۷ بار دینامیکی دستگاه دو سیلندر با میل لنگ‌های 90°
- ۱۸۲ ۳ - ۱ - ۷ سیستم دینامیکی
- ۱۸۴ ۴ - ۱ - ۷ معادلات حرکت
- ۱۸۷ ۲ - ۷ تحلیل لرزه‌ای سازه یک مدفون در یک نیم‌فضای چندلایه
- ۱۹۵ ۳ - ۷ برج توربین باد داخل دریا با پی صندوقچه‌ای مکشی

۸ - ملاحظات نهایی ۲۰۵

پیوست الف: تحلیل پاسخ در حوزه فرکانس ۲۱۳

- ۲۱۳ الف - ۱ توصیف‌های جایگزین حرکت هارمونیک
- ۲۱۵ الف - ۲ تابع پاسخ فرکانس مختلط
- ۲۱۹ الف - ۳ تحریک متناوب
- ۲۲۲ الف - ۴ تحریک دلخواه

پیوست ب: اندرکنش دینامیکی خاک - سازه ۲۲۵

- ۲۲۵ ب - ۱ معادلات حرکت در تغییر مکان کلی
- ۲۳۰ ب - ۲ پاسخ میدان آزاد ساختگاه

پیوست پ: انتشار موج در میله منشوری نیمه‌بی‌نهایت ۲۳۷

پیوست ت: یادداشت تاریخی ۲۴۷

پیوست ث: راهنمای کاربر برنامه CONAN (CONE ANalysis) ۲۵۱

- ۲۵۲ ث - ۱ خلاصه برنامه
- ۲۵۲ ث - ۲ توصیف مسئله
- ۲۵۷ ث - ۳ کاربرد CONAN
- ۲۶۱ ث - ۴ پردازش بیشتر نتایج

پیوست ج: روش‌های MATLAB برای تحلیل مخروطی ۲۶۳

۲۶۳.....	مرور کلی MATLAB.....	ج - ۱
۲۶۴.....	توصیف مسئله.....	ج - ۲
۲۶۷.....	توابع عمومی.....	ج - ۳
۲۷۱.....	قلب روش.....	ج - ۴
۲۷۵.....	سختی دینامیکی میدان آزاد.....	ج - ۵
۲۷۷.....	سختی دینامیکی پی.....	ج - ۶
۲۸۱.....	حرکت ورودی موثر پی.....	ج - ۷
۲۸۴.....	مثال اجرا شده: پاسخ لرزه‌ای.....	ج - ۸

پیوست چ: تحلیل مستقیم در حوزه زمان..... ۲۸۹.....

۲۹۱.....	تحلیل انعطاف‌پذیری برای حرکت انتقالی.....	چ - ۱
۲۹۷.....	رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان در حوزه زمان برای حرکت انتقالی.....	چ - ۲
۳۰۱.....	تحلیل لرزه‌ای بلوک صلب واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای چندلایه.....	چ - ۳
۳۰۴.....	تحلیل حرکت دورانی.....	چ - ۴

۳۰۹.....	مراجع.....
۳۱۳.....	واژه نامه.....
۳۱۷.....	فهرست راهنما.....

معرفی کتاب

ترجمه کتب تخصصی، به خصوص موضوعاتی که در ادبیات فنی فارسی دارای پیشینه‌ای طولانی نیستند، نقش بسیار عمده‌ای در پیشرفت‌های فنی دارند. این ترجمه‌ها پلی بین فرهنگ پیشرفته فنی و فرهنگ در حال رشد کشور عزیزمان ایران است. چنین امری در تمام دنیا رایج است و ترجمه حتی در زبان‌هایی که خود را در زمینه فنی پیشرفته و ریشه‌دار می‌دانند نیز انجام می‌شود. لیکن ترجمه باید توسط شخصی انجام شود که:

۱. به موضوعی که در آن به ترجمه می‌پردازد آشنا بوده و درک فیزیکی از آن داشته باشد. به این معنی که ترجمه نه برای کسب تجربه، بلکه برای انتقال آن باشد.
۲. به ادبیات فنی زبان مادری آشنا باشد.
۳. به ادبیات فنی و آیین‌نامه‌های زبان اصلی مسلط باشد.

با تلفیق سه موضوع فوق، در نتیجه زحمات مترجم، ترجمه‌ای حاصل می‌گردد که دانشجویان و محققان می‌توانند با صرف کمترین انرژی با زبان سلیس مادری موضوع را مطالعه و کسب معلومات نمایند. باید اذعان داشت که هیچ زبانی نمی‌تواند از نظر ادراک، جای زبان مادری را بگیرد.

کتاب «*تحلیل ارتعاشات پی: روش مقاومت مصالح*» اولین کتابی است که با زبانی گویا، مدل‌سازی خاک بر مبنای مدل‌های مخروطی را برای حالت‌های بارگذاری زلزله مورد بررسی قرار می‌دهد.

جناب آقای دکتر ساسان محاسب با تسلط کامل، و به‌طور مستقل، تهیه و تدوین و ترجمه زیبایی را از موضوعی بدیع، فنی ارائه نموده‌اند که استفاده از آن برای اساتید محترم فعال در این زمینه و دانشجویان و مهندسين، بسیار قابل توصیه است. و هیچ پاداش مادی نمی‌تواند جبران زحمات ایشان را نماید، فقط اجر معنوی این اثر، توشه گرانبهایی برای ایشان خواهد بود.

سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز مرده آن است که نامش به نکویی نبرند

شاپور طاحونی

(عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

پاییز ۱۳۹۰



مقدمه مترجم

در چند دهه اخیر مدل سازی و تحلیل سازه‌ها تحت بارگذاری زلزله به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. نرم افزارهای توانمندی در ایران برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها وجود دارد. اما در بیشتر موارد، مدل سازی خاک به خوبی مورد بررسی قرار نمی‌گیرد یا از آن صرف نظر می‌شود! در کشور لرزه خیزی مانند ایران با آسیب پذیری نسبی بالا در برابر خطر زلزله، در نظر گرفتن اثرات خاک از قبیل اثرات ساختمانی و یا اندرکنش خاک - سازه از اهمیت قابل توجهی برخوردار است.

کتاب حاضر مدل سازی خاک بر مبنای مدل های مخروطی را برای حالت بارگذاری زلزله مورد بررسی قرار می‌دهد. مدل های مخروطی بر اساس روش مقاومت مصالح که روشی آشنا برای مهندسان سازه به شمار می‌آید، توسعه یافته است. این کتاب مشتمل بر نتایج بیش از سی سال تحقیقات در مؤسسه تکنولوژی فدرال سوئیس (ETH) در زوریخ و لوزان در زمینه اندرکنش خاک - سازه از جمله تز دکترا اینجانب می‌باشد.

مدل های ارائه شده در این کتاب در بیش از یک صد پروژه کاربردی توسط اینجانب در سوئیس و ایران مورد استفاده قرار گرفته است. برای نمونه، اینجانب به عنوان مدیر پروژه بهسازی لرزه ای هتل بزرگ آزادی تهران، مدل های ارائه شده در این کتاب را در تحلیل لرزه ای این هتل ۲۸ طبقه به کار بردم. با در نظر گرفتن اثرات اندرکنش خاک - سازه در پروژه بهسازی لرزه ای این هتل بزرگ، نیروی برشی کل و لنگر خمشی در پی، بیش از ۱۷ درصد کاهش پیدا کرد. شتاب نیز در طبقه آخر از ۲ برابر به ۱/۶ برابر شتاب ثقل زمین کاهش یافت. بدون در نظر گرفتن این اندرکنش احتیاج به تقویت پی بود که نیازمند هزینه های بسیار سنگینی بود. در این پروژه، کاربرد اثرات خاک موجب کاهش هزینه های بهسازی تا حدود ۲۰ درصد گردید!

این کتاب به عنوان مرجع درسی به دفعات در دوره های دانشگاه های تبریز و آزاد قزوین در ایران توسط اینجانب مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین مفاهیم این کتاب تاکنون در سمینارهای متعددی در دانشگاه ها و انجمن های علمی و فنی ایران از جمله دانشگاه های صنعتی شریف، امیرکبیر، تبریز، آزاد قزوین، یزد، بین المللی چابهار، سراب، پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله ایران، شرکت ملی نفت ایران و انجمن ایرانی مهندسان محاسب ساختمان، از سوی اینجانب ارائه شده است.

ش

شایان ذکر است که انگیزه اصلی اینجانب از ترجمه و انتشار این کتاب به زبان فارسی فقدان کتاب یا مرجعی با این عنوان یا عنوانی مشابه آن در ایران بوده است. افزون بر آن، در هنگام تدریس در ایران متوجه مشکل دانشجویان در مراجعه به کتاب به زبان اصلی شدم. از آنجا که متن اصلی کتاب به طور نسبی سنگین است، ضرورت داشت کتاب به صورت ترجمه شده در اختیار دانشجویان و مهندسان شاغل قرار گیرد تا استفاده از آن آسان تر باشد. از این رو با توجه به اینکه کوشش زیادی به عمل آمد تا متن فارسی مطابقت کامل با متن اصلی داشته باشد، از خوانندگان محترم کتاب درخواست می‌گردد هرگونه نظر اصلاحی خود را به صاحب اثر به نشانی (smteam@gmx.ch) اعلام نمایند تا در چاپ‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

در اینجا لازم می‌دانم از همکاری ارزنده مهندس بهاره عبدالهی در ترجمه فارسی کتاب تشکر نمایم. از همکاری صمیمانه دکتر احمد نادرزاده، دکتر مسعود حاجی علیلوی بناب و دکتر حسین غفارزاده در بازخوانی و ویرایش متن کتاب و ارائه نکات بسیار مفید نیز سپاس‌گزاری می‌نمایم. علاوه بر این از جناب آقای دکتر یوسف زندی، مهندس صمد دهقان و مهندس سید آرش سهرابی از مجموعه انستیتو مقاوم‌سازی لرزه‌ای ایران و دبیرخانه دائمی کنفرانس‌های مقاوم‌سازی کشور به جهت برگزاری و دعوت اینجانب به کنفرانس‌های بین‌المللی متعدد مقاوم‌سازی در شهر تبریز کمال تشکر را دارم. همچنین قدردانی خود را از خانم‌ها مهندس یاسمن خلیل‌پور و مهندس سحر مظهری در تهیه و ترجمه این کتاب ابراز می‌دارم.

در پایان، بنده خود را مرهون دکتر جان پ. ولف (مؤلف اصلی کتاب) از مؤسسه تکنولوژی فدرال سوئیس برای مشاوره در انجام تحقیق دکتری اینجانب در زمینه اندرکنش خاک - سازه و نیز حمایت مداوم وی در طول ترجمه کتاب می‌دانم.

از خانم مهناز عزب‌دفتری و گروه ایشان در سازمان پژوهش، که امورات صفحه‌آرایی، فنی و هنری کتاب را با بهترین کیفیت به‌انجام رسانیدند تشکر می‌نمایم.

ساسان محاسب

دکترای مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی ETH زوریخ

کارشناسی ارشد دانشگاه استنفورد، ایالات متحده امریکا

مدیر عامل شرکت SMTeam در زوریخ، سوئیس

مهر ۱۳۹۰، تهران

پیش درآمد

رشد فزاینده توانمندی محاسباتی در طول چند دهه اخیر، حل حتی پیچیده‌ترین مسائل اندرکنش خاک و سازه را از طریق تحلیل‌های عددی مفصل فراهم نموده است. با این حال، همچنان بین پتانسیل تحلیل چنین مسائل و قابلیت کاربردی آن، چه برای یک کاربرد ویژه و چه برای اهداف پژوهشی، شکافی وجود دارد. در عوض، راه‌حل‌های ساده‌سازی شده‌ای به منظور تمرکز بر بخش بحرانی مسئله کلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین، ممکن است مهندسان پی، سازه اصلی را با یک بلوک الاستیک ایده‌آل‌سازی شده یا حتی به صورت یک بارگذاری یکنواخت اعمال شده به زمین نمایش دهند، در حالی که مهندسان سازه، زمین را به صورت بستری از فنرهای توزیع شده یا یک مرز صلب به نمایش می‌گذارند.

هنگامی که سازه اصلی مدل‌سازی می‌شود، عموماً به جای المان‌های پیوسته سه‌بعدی، سازه به مجموعه‌ای از المان‌های یک‌بعدی (میله یا تیر) و دوبعدی (پیوسته یا صفحه) تقسیم‌بندی می‌شود. چنین المان‌هایی نمایانگر رویکردی هستند که در این کتاب روش "مقاومت مصالح" نامیده می‌شود. این المان‌ها از محورهای هندسی غالب که در بیشتر مؤلفه‌های سازه‌ای قابل مشاهده هستند، به همراه ساده‌سازی فرضیاتی که کمی‌سازی ماتریس‌های سختی مناسب را برای المان‌ها ممکن می‌سازد، بهره می‌جویند. اگرچه مدل اولیه یک‌بعدی یا دوبعدی است، این المان‌ها، قوانین موشکافانه‌تر پاسخ را دربر می‌گیرند، که اثرات سه‌بعدی موضعی از قبیل کمانش لبه تیر را ممکن می‌سازد.

با استفاده از عناصر ساده‌سازی شده قابل بررسی تحلیل پاسخ زمین به میزان کمتری آشکار می‌باشد. در عوض، المان‌های پیوسته تقریباً به صورت جهانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگرچه اغلب، هندسه کلی مسئله به دوبعدی، کرنش صفحه‌ای یا تقارن محوری ساده‌سازی می‌شود. در مسائل استاتیکی، با استفاده از روش‌های پیشگام لایه محدود ارائه شده توسط Booker و Small، لایه‌بندی افقی (معمولاً مفروض) خاک و سنگ سبب تبدیل مسئله سه‌بعدی به مسئله دوبعدی می‌گردد، اگرچه همچنان نیاز به توسعه نرم‌افزاری پیچیده وجود دارد. در مسائل دینامیکی، ایده‌آل‌سازی ابتدایی توسط فنرها و میراگرهای متمرکز یک ساده‌سازی نمادین‌تر از پاسخ زمین است

ض

که شاید یک لغزنده پلاستیک را برای نمایش حد ظرفیت باربری به کار گرفته‌اند. چنین مدل‌هایی در تحلیل پاسخ ضربه و ارتعاش شمع‌های مدفون در خاک مورد استفاده قرار گرفته‌اند، اما این مدل‌ها به منظور بررسی خاک لایه‌بندی شده یا هندسه‌های پیچیده‌تر پی به سادگی قابل تعمیم نیستند.

مؤلفان کتاب حاضر، مجموعه‌ای از ایده‌آل‌سازی‌های "مقاومت مصالح" را برای پاسخ ژئوتکنیکی در تحلیل مسائل پی ایجاد کرده‌اند. ایده‌آل‌سازی‌ها، مشابه عناصر میله و تیر رایج در مهندسی سازه است و بر پایه مدل مخروطی ناقص ارائه شده توسط Meek با همکاری Veletsos و Wolf می‌باشد. Wolf در کتاب قبلی خود (تحلیل ارتعاش پی با استفاده از مدل‌های فیزیکی ساده، Prentice Hall، ۱۹۹۴)، مدل مخروطی ناقص را به دامنه‌ای از مسائل فیزیکی و مودهای مختلف تحریک دینامیکی تعمیم داد و همچنین مدل‌های مختلف پارامتر متمرکز را مستندسازی نمود. در حالی که پاسخ‌های جایگزین فراهم شده در آن کتاب برای مهندسان ژئوتکنیک شاغل بسیار سودمند واقع شده است، کتاب حاضر بر توسعه جامع مدل‌های مخروطی ناقص متمرکز می‌شود. به این ترتیب به کاربران این امکان داده می‌شود که مجموعه‌ای از روش‌های خود را برای مسائل موردنظر، ناشی از ارتعاشات به وجود آمده در اثر سازه یا در اثر رویدادهای لرزه‌ای، توسعه دهند. شایستگی ویژه این کتاب استفاده از نرم افزار MATLAB به همراه یک برنامه اجرایی کامل CONAN است که نقطه شروعی را برای راه‌حل‌های طراحی فراهم می‌نماید.

راه‌حل‌های پایه‌ای در حوزه فرکانس توسعه یافته‌اند و بنابراین به پاسخ خطی خاک محدود می‌شوند. بلوک‌های سازنده شامل پاسخ قائم، افقی، دورانی و چرخشی یک پی دیسکی واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن است. قدرت کتاب در توسعه تفصیلی این پاسخ‌های اولیه با استفاده از مفهوم انعکاس و انکسار در سطوح مشترک بین لایه‌ها است که این پاسخ‌ها به منظور بررسی پی‌های مدفونی ایجاد می‌شوند که دارای اشکال کاملاً دلخواه در نهشته‌های خاک لایه‌ای و بر روی تکیه‌گاه صلب یا یک واسطه نامحدود هستند. با استفاده از مثال‌های مناسب (تکمیل شده با بخش‌هایی از کد نرم افزار MATLAB)، به خواننده نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان روش‌ها را به منظور ارزیابی پاسخ در برابر جنبش‌های میدان آزاد یا ارتعاشات به وجود آمده در داخل سازه به کار برد.

موضوع به صورت کاملاً جامع و به همراه پیوست‌های مفصل بررسی شده است. این پیوست‌ها شامل توسعه راه‌حل‌های پایه‌ای و همچنین یکپارچه‌سازی آنها جهت بررسی مسائل علمی می‌باشند. جریان متن اصلی با تامل به صورت منظم قرار داده شده و حتی مستندسازی تاریخی روش‌های مخروطی ناقص به صورت مرتب در یک پیوست جداگانه خلاصه شده است.

این کتاب، ششمین کتاب تألیف شده توسط John Wolf است و مطمئن هستیم که مشابه

کتاب‌های قبلی وی، به عنوان نقطه عطفی در زمینه اندرکنش دینامیکی خاک و سازه خواهد بود. در کتاب حاضر، وی به نویسنده دیگری، Andrew Deeks، ملحق شده که تاثیر مثبت وی به روشنی در کد نرم‌افزار MATLAB و برنامه اجرایی CONAN قابل مشاهده است. مؤلفان به منظور ارزیابی دقت روش خود در مقایسه با پاسخ‌های فرم بسته و نتایج عددی دقیق، زحمات بسیاری را متحمل شده‌اند. همان‌طور که آن‌ها اشاره می‌کنند، حتی در بدترین حالات، خطاها در مقایسه با سایر عدم قطعیت‌های موجود به ویژه در ارتباط با تعریف مشخصات دینامیکی واسطه ژئوتکنیک، نسبتاً جزیی می‌باشند. مشابه تحلیل سازه، محدودیت‌هایی برای راه‌حل‌های روش متعارف 'مقاومت مصالح' وجود دارد. بنابراین، موقعیت‌هایی وجود خواهد داشت که روش‌های توصیف شده در اینجا ممکن است کافی نباشند. با این حال، این کتاب مبنای قدرتمندی را برای رویکرد روش 'مقاومت مصالح' در مسائل دینامیکی پی پایه‌گذاری می‌نماید و بدون تردید برای طیف مهندسان شاغل، پژوهشگران و مدرسان از ارزش بسیاری برخوردار خواهد بود.

Mark F. Randolph
University of Western Australia



پیشگفتار

تحلیل‌های سازه‌ای اغلب بر مبنای روش مقاومت مصالح با استفاده از اعضای محوری و خمشی انجام می‌شوند. با فرض رفتار تغییرشکل ('مقاطع صفحه به صورت صفحه باقی می‌مانند')، روش دقیق و پیچیده الاستیسیته سه‌بعدی با یک توصیف یک‌بعدی تقریبی ساده که برای طراحی کفایت می‌کند، جایگزین می‌شود. این روش که به خوبی توسعه یافته، این امکان را برای سیستم‌های سازه‌ای پیچیده از قبیل پل‌های پیش‌تنیده مورب خمیده با بارهای متحرک فراهم نموده تا به وسیله میله‌ها و تیرهای یک‌بعدی مدل‌سازی شوند. این تئوری مقاومت مصالح به میزان گسترده‌ای در دانشکده‌های مهندسی عمران و مکانیک، با استفاده از کتاب‌های درسی عالی موجود در این زمینه آموزش داده می‌شود.

در مقابل، در مهندسی ژئوتکنیک به عنوان حوزه دیگری از مهندسی عمران که در آن مدل‌سازی دارای اهمیت است، روش مقاومت مصالح به میزان وسیع مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. دو دلیل اصلی برای این موضوع وجود دارد. اول اینکه، در مهندسی سازه عناصر باربری که باید تحلیل شوند تمایل دارند از یک جهت غالب برای تعیین محورها و مشخصات سطح مقطع میله‌ها و تیرها برخوردار باشند، در حالی که در مهندسی ژئوتکنیک واسطه سه‌بعدی خاک و سنگ وجود دارد. بنابراین، انتخاب محورها و به ویژه مشخصات سطح مقطع که باید قادر به بیان تمام ویژگی‌های لازم با رفتار تغییرشکل تعیین شده باشد، در مهندسی ژئوتکنیک مشکل‌تر از مهندسی سازه است. دوم اینکه، تا زمان اخیر، وضعیت توسعه این روش به شدت محدود بود. حتی در بیش از ده سال گذشته، تنها برای پی‌های سطحی واقع بر روی نیم‌فضای همگن نمایانگر خاک، امکان مدل‌سازی با روش مقاومت مصالح با استفاده از میله‌ها و تیرهای مخروطی که در ادامه مخروط‌ها نامیده می‌شوند، وجود داشت. از آنجا که مشخصات خاک در یک ساختگاه واقعی با عمق تغییر می‌کند، این رویکرد تنها دارای اهمیت آکادمیک بود.

با این حال، چنین تلاش پیشگامی مبانی پیشرفت‌های مهم اخیر را تشکیل داد. امروزه، بر مبنای همان فرضیات، موارد کاربردی با پیچیدگی معقول را می‌توان تحلیل نمود. ساختگاه می‌تواند دارای هر تعداد لایه افقی باشد، مدل‌سازی، تغییرات عمومی مشخصات در عمق را ممکن می‌سازد. افزون بر پی‌های سطحی، پی‌های مدفون را نیز می‌توان تحلیل نمود. تحریک لرزه‌ای را می‌توان

بدون معرفی فرضیات جدید پردازش نمود. بنابراین، مدل‌های مخروطی را می‌توان به منظور مدل‌سازی پی در یک تحلیل اندرکنش دینامیکی خاک و سازه به کار برد. مدل‌های مخروطی برای محدوده‌های فرکانسی کم و متوسط که برای ارتعاشات دستگاه‌ها و زلزله اهمیت دارد، برای حد فرکانس‌های خیلی بالا که در بارهای ضربه‌ای رخ می‌دهد و همچنین برای محدودیت دیگر، حالت استاتیکی، به خوبی عمل می‌کند. با استفاده از ساده‌سازی فیزیک مسئله، وضوح مفهومی با درک فیزیکی حاصل می‌شود. در مدل‌های مخروطی، الگوی موج به روشنی فرض می‌گردد. موج به سمت بیرون از آشفته‌گی انتشار یافته و در جهت انتشار، در سطح مقطع مخروط توزیع می‌شود. هنگام مواجهه با ناپیوستگی مشخصات مصالح، متناظر با سطح مشترک لایه‌های خاک، دو موج جدید به وجود می‌آید: یک موج انعکاس یافته و یک موج انکسار یافته با انتشار در مخروط‌های خود. در صورت مدل‌سازی با مخروط‌ها، تحلیل‌گر احساس آسودگی می‌کند، زیرا همان مفاهیم آشنای مقاومت مصالح که به صورت روزانه در تحلیل سازه مورد استفاده قرار می‌گیرند، به کار برده می‌شوند. این حالت، در مقایسه استفاده از روش‌های دقیق بر مبنای الاستودینامیک سه‌بعدی قابل توجه می‌باشد که با پیچیدگی ریاضی، کاربران را دچار عدم اطمینان نموده و درک فیزیکی را از بین می‌برد. به دلیل ساده‌سازی مسئله فیزیکی، ریاضیات مدل‌های مخروطی را می‌توان به صورت دقیق حل نمود. بنابراین، اصول اولیه انتشار موج و دینامیک آن به طور دقیق برای مخروط‌ها ارضا می‌گردد. راه‌حل‌های فرم بسته برای این موارد یک‌بعدی وجود دارد. به این ترتیب، سادگی در یک کاربرد عملی به وجود می‌آید. در واقع، کاربرد مدل‌های مخروطی در مقایسه با استفاده از روش‌های دقیق الاستودینامیک، تاحدی باعث کاهش در دقت می‌شود. با این حال، کاهش دقت از طریق مزیت‌های بسیاری که در بالا بیان شد، جبران می‌شود. همچنین باید به خاطر سپرد که دقت هر تحلیل همواره با وجود عدم قطعیت‌های قابل توجه، از قبیل مشخصات مصالح خاک که اجتناب‌ناپذیرند، محدود خواهد بود. به طور خلاصه، سادگی کاربرد به ویژه به همراه درک فیزیکی، عمومیت کافی و دقت خوب، این امکان را برای مدل‌های مخروطی فراهم می‌آورد که برای ارتعاش پی و تحلیل‌های اندرکنش دینامیکی خاک و سازه در موارد روزانه در یک دفتر طراحی به کار برده شوند. بیان این مطلب پسندیده است که یک طراحی متعادل با استفاده از مدل‌های مخروطی به سادگی می‌انجامد که بر مبنای عقلانیت بوده و نهایت کمال است!

برای شروع، تئوری مقاومت مصالح یک‌بعدی برای میله‌ها و تیرهای مخروطی، که مخروط‌ها نامیده می‌شوند، توسعه یافته و برای مسائل عملی ارتعاش پی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هیچ پیش‌نیازی به جز مکانیک مقدماتی که در دانشکده‌های مهندسی عمران در تمام دانشگاه‌ها آموزش داده می‌شوند، مورد نیاز نیست. به ویژه، به منظور محاسبه رفتار دینامیکی یک پی، مفاهیم دینامیک

سازه مورد نیاز نمی‌باشند. (برای انجام تحلیل اندرکنش دینامیکی خاک و سازه، مدل‌سازی سازه نیز باید انجام شود که در هر حال خارج از دامنه این کتاب است.) بررسی مقدماتی در متن اصلی کتاب به تحریک هارمونیک (حوزه فرکانس) محدود شده است. تحلیل مستقیم در حوزه زمان نیز انجام شده و در یک پیوست ارائه شده است. تبدیل از حوزه زمان به حوزه فرکانس، با استفاده از یک‌سری فوریه در پیوست دیگری بیان شده است. معادلات حرکت اندرکنش دینامیکی خاک و سازه نیز در یک پیوست دیگر مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که پی‌ها حوزه‌های نیمه‌نامحدود هستند، فرآیند تبدیل به مختصات مودال را که در دینامیک سازه بسیار قوی است، نمی‌توان برای آنها مورد استفاده قرار داد. در نتیجه، در پی‌ها انتشار موج یک نقش کلیدی را ایفا می‌نماید. حرکت موج در میله‌های منشوری در یک پیوست معرفی شده و انتشار موج در مخروط‌های یک بعدی به تفصیل در طول کتاب توصیف شده است. در عمل، تنها دو جنبه از حرکت موج مورد نیاز می‌باشد: انتشار امواج در مخروط اولیه به سمت بیرون از آشفتگی و تولید امواج انعکاس‌یافته و انکساریافته در محل ناپیوستگی مصالح که متناظر با سطح مشترک لایه‌های خاک است. با دنبال کردن متوالی انعکاس و انکسار هر موج برخورد، الگوی موج برهم نهی شده تا یک مرحله معین را می‌توان تشکیل داد. این فرآیند به ساده‌سازی قابل توجه در فرمول‌بندی و برنامه‌نویسی می‌انجامد. ارزیابی جامعی از دقت برای محدوده وسیعی از ساختگاه‌های واقعی انجام شده است. نرم‌افزار کوتاه نوشته شده در محیط MATLAB، بخشی بنیادی از کتاب را تشکیل می‌دهد. این برنامه در مراحل در فصل‌های مختلف کتاب معرفی شده است. درکی جامع از تمام جنبه‌های برنامه که توسط کاربر به سادگی قابل اصلاح است، حاصل می‌گردد. افزون بر آن، نرم‌افزار CONAN (CONE ANalysis) با بیان تفصیلی ورودی و خروجی فراهم شده که قابل استفاده برای تحلیل‌های کاربردی است. به عنوان چند مثال، مسئله پیچیده فونداسیون ماشین، مسئله رایج اندرکنش لرزه‌ای خاک و سازه و بالاخره برج توربین باد داخل دریا با پی صندوقچه‌ای مکشی تحلیل شده‌اند. واژه‌نامه برای ترجمه اصطلاحات فنی کلیدی به زبان‌های مختلف، پذیرش بین‌المللی کتاب را افزایش می‌دهد.

بسیاری از ایده‌های موجود در این کتاب، به تدریج در طول ده سال گذشته توسعه یافته‌اند. در ابتدا به منظور جذب مشاوران ژئوتکنیک، کتاب دیگری با عنوان "تحلیل ارتعاش پی با استفاده از مدل‌های ساده فیزیکی" توسط (Hall, 1994 Prentice)، نوشته شده است. این کتاب شامل توصیف کاملی از مدل‌های ساده فیزیکی است که در آن علاوه بر مخروط‌ها، مدل‌های پارامتر متمرکز (مدل‌های فنر - میراگر - جرم) و الگوهای موج افقی تعیین شده نیز استخراج شده‌اند. با این حال، جامعیت و در نتیجه فزونی مطالب این کتاب ممکن است خواننده را کسل نماید. همچنین از زمان انتشار آن کتاب، پیشرفت‌های قابل توجهی در زمینه مدل‌های مخروطی به دست آمده است. به

این ترتیب کتاب جامع حاضر بدون لزوم هیچ پیش‌نیازی، بر روش‌های مخروطی تمرکز کرده و تنها با استفاده از فرضیات استاندارد تئوری مقاومت مصالح نوشته شده است. پژوهش بسیار اخیر انجام شده توسط مولفان که فرمول‌بندی را کارآمد نموده، به کار گرفته شده است. پیرو پیشنهاد خوانندگان کتاب قبل در طول سال‌ها، یک برنامه کامپیوتری برای تحلیل موارد عملی به طور کامل تکمیل شده که به تفصیل شرح داده شده است. کتاب جدید دربرگیرنده آخرین پیشرفت‌ها در زمینه مدل‌های مخروطی است، اما می‌تواند به عنوان مبنا برای درس اولیه در دینامیک خاک مهندسی ژئوتکنیک مورد استفاده قرار گیرد (در سال آخر دوره کارشناسی یا سال اول دوره تحصیلات تکمیلی) یا به عنوان یک درس در دینامیک سازه آموزش داده شود، زیرا تمام سازه‌ها دارای پی‌هایی هستند که باید تحلیل گردند. از آنجا که دانشجویان، میله‌ها و تیرهای مخروطی را به طور وسیعی در مهندسی سازه مقدماتی مورد مطالعه قرار می‌دهند، مبنای توسعه آن به علم دینامیک بسیار استوار است. افزون بر آن، کتاب برای مهندسان ژئوتکنیک شاغل ارزشمند خواهد بود که تنها باید یک برنامه کامپیوتری را پس از درک کامل روش محاسباتی آن مورد استفاده قرار دهند. روش محاسباتی تفصیلی ارائه شده در این کتاب، برای آنان آشنا خواهد بود، زیرا روش مقاومت مصالح به کار برده شده همان روش معمول مورد استفاده در تحلیل سازه است.

همکاری Matthias Preisig در دانش‌نامه وی باید مورد توجه قرار گیرد که به روشنی پتانسیل فرمول‌بندی پُربازده با استفاده از مخروط‌ها را نمایش می‌دهد. از پژوهش خلاقانه دکتر Jethro W. Meek در یک فضای غیررسمی، پُرشور و دانشگاهی به همراه مؤلف ارشد در ابتدای دهه ۱۹۹۰، که مبنای رویکرد مقاومت مصالح را تشکیل می‌دهد، صمیمانه قدردانی می‌گردد. مؤلفان، مرهون تلاش پروفیسوران Eduardo Kausel از MIT و John Tassoulas از دانشگاه Texas Austin هستند که به درخواست آن‌ها، نتایج موردنیاز برای مقایسه را محاسبه نمودند. بدون این حمایت، یک ارزیابی دقت سیستماتیک ممکن نبوده است. همچنین از دکتر Nelson Lam از دانشگاه Melbourne، برای آماده‌سازی جنبش نیرومند شبیه‌سازی شده زمین برای زلزله Newcastle در سال ۱۹۸۹، قدردانی می‌گردد. مؤلفان، مرهون زحمات پروفیسور Mark Randolph از مدیر مرکز سیستم‌های پی داخل دریا (Centre for Offshore Foundation Systems) از دانشگاه Western Australia برای نوشتن پیش‌درآمد می‌باشند.

John P. Wolf
Swiss Federal Institute of Technology
Lausanne

Andrew J. Deeks
The University of Western Australia
Perth

۱

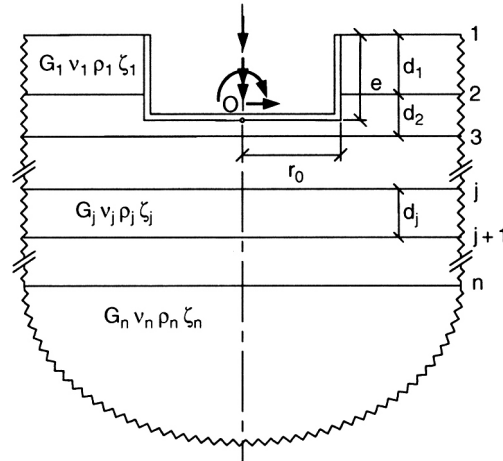
مقدمه

۱-۱ تعریف مسئله

در ابتدا ارائه توضیح اولیه زیر مناسب می‌باشد. به منظور بررسی هدف تحلیل ارتعاش پی، عبارت‌های معینی از جمله سختی دینامیکی یا حرکت ورودی مؤثر پی معرفی می‌شود. در این مرحله، تنها ارائه یک توصیف کیفی به صورت کلی و بدون یک تعریف روشن امکان‌پذیر است. خواننده نباید آزرده خاطر شود. از فصل ۲ به بعد، روش کار به صورت نظام‌مند، از جزء به کل و به طور دقیق بیان می‌شود.

هدف از تحلیل ارتعاش پی در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. پاسخ یک پی استوانه‌ای بدون جرم به شعاع r_0 ، مدفون در عمق e در یک نیم‌فضای خاک چندلایه، باید برای تمام درجات آزادی محاسبه گردد. دیواره قائم و تکیه‌گاه افقی پی صلب فرض می‌شود. به عنوان یک حالت خاص، یک پی سطحی دایره‌ای را می‌توان مورد بررسی قرار داد که متناظر با $e=0$ است. لایه‌بندی افقی خاک با مشخصات ثابت مصالح در هر لایه وجود دارد. لایه j ام با ضخامت d_j دارای مدول برشی G_j ، نسبت پواسون ν_j ، چگالی جرم ρ_j و نسبت میرایی هیسترسیس $\zeta_j (j=1, 2, \dots, n-1)$ می‌باشد. نیم‌فضای همگن زیرین با اندیس n مشخص شده است. ساختگاه همچنین می‌تواند در تکیه‌گاه خود به صورت گیردار باشد (نیم‌فضای

۲ تحلیل ارتعاشات پی

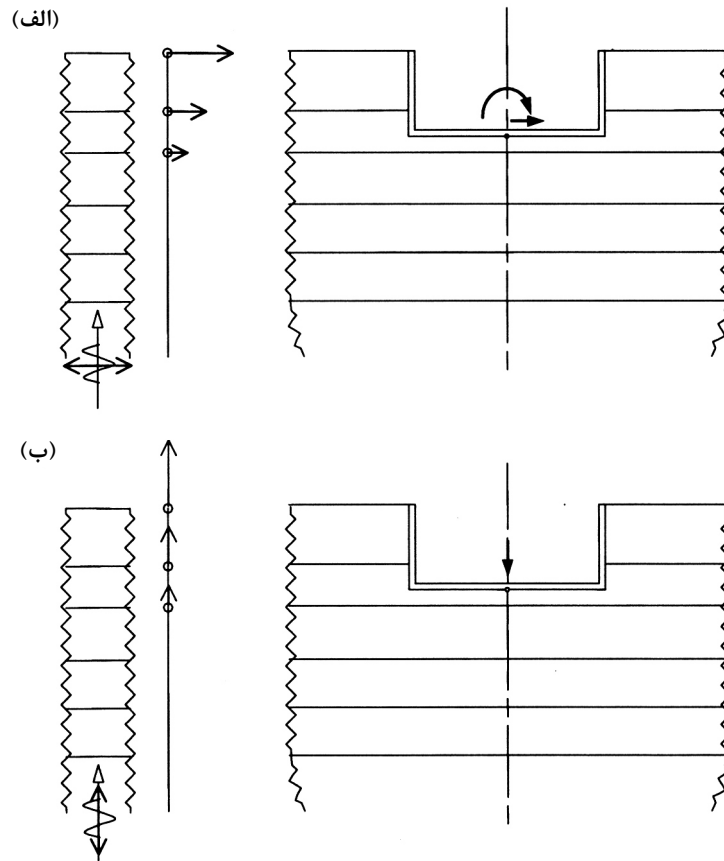


شکل ۱-۱ پی استوانه‌ای مدفون در نیم‌فضای خاک چندلایه با درجات آزادی.

زیرین صلب). رفتار ساختگاه به صورت خطی در نظر گرفته شده است، به این معنی که فرض می‌شود خاک در طول تحریک دینامیکی به صورت الاستیک خطی با میرایی هیستریسیس مصالح باقی بماند. برای توجیه این فرض می‌توان اشاره نمود که به منظور عملکرد رضایت‌بخش دستگاه‌ها، تغییر مکان‌های مجاز پی‌ها به کسرهایی از میلی‌متر محدود می‌شوند. همچنین باید به این نکته توجه داشت که تمام امواجی که به سمت بی‌نهایت منتشر می‌شوند، به دلیل گسترش هندسی دستخوش کاهش دامنه می‌شوند، در نتیجه می‌توان خاک را به سمت بی‌نهایت به صورت خطی در نظر گرفت. بنابراین، تغییر شکل‌های غیر الاستیک به وجود نمی‌آید.

دو نوع بار دینامیکی متغیر در طول زمان در نظر گرفته شده است. این دو نوع بار دینامیکی شامل بارهایی هستند که به طور مستقیم بر روی پی صلب در نقطه O (شکل ۱-۱) اعمال می‌شوند که به طور مثال از ماشین‌های دورانی و یا تحریک‌های ایجاد شده در خاک در اثر امواج لرزه‌ای ناشی شده‌اند. برای تحریک‌های ایجاد شده در اثر امواج لرزه‌ای، تنها امواج با انتشار قائم، با حرکت جزء در هر یک از جهت‌های افقی یا قائم در نظر گرفته می‌شوند. اصطلاح حرکت میدان/آزاد، یعنی تغییر مکان‌های ساختگاه در مبدأ قبل از گودبرداری، به صورت شماتیک برای این زلزله‌های افقی و قائم به ترتیب در سمت چپ شکل‌های ۱-۲ - الف و ۱-۲ - ب نشان داده شده‌اند.

۱. مقدمه ۳



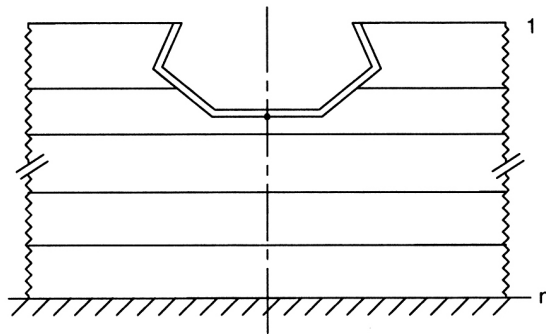
شکل ۱-۲ حرکت میدان آزاد و حرکت ورودی مؤثر پی برای تحریک لرزه‌ای با انتشار قائم. (الف) زلزله افقی؛ (ب) زلزله قائم.

به عنوان یک تعمیم ساده، هر پی متقارن محوری را می‌توان بررسی نمود (شکل ۱-۳). قائم بودن دیواره الزامی نیست، اما تکیه‌گاه باید افقی باشد. این بار نیز دیواره و تکیه‌گاه صلب فرض می‌شوند.

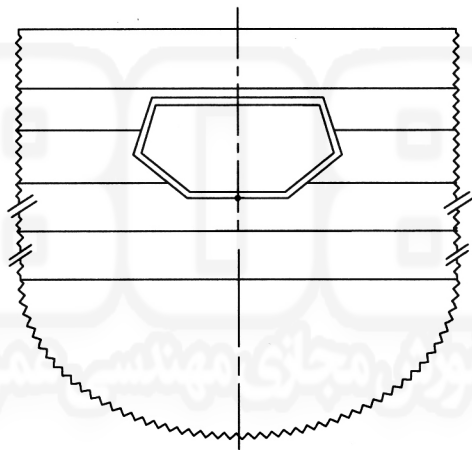
پی‌های در بر گرفته شده متقارن محوری را نیز می‌توان بررسی نمود (شکل ۱-۴). این پی‌ها، پی‌های کاملاً مدفون نامیده می‌شوند، اما در مواردی که دیواره‌ها سطح آزاد را قطع می‌کنند، به نیمه مدفون منسوب هستند که متمایز نمودن این دو نوع لازم است. البته یک پی در فضای کامل همواره به صورت کاملاً مدفون است.

پی‌های عمومی‌تر را می‌توان به حالت‌های متقارن محوری تبدیل نمود. این تبدیل را

۴ تحلیل ارتعاشات پی



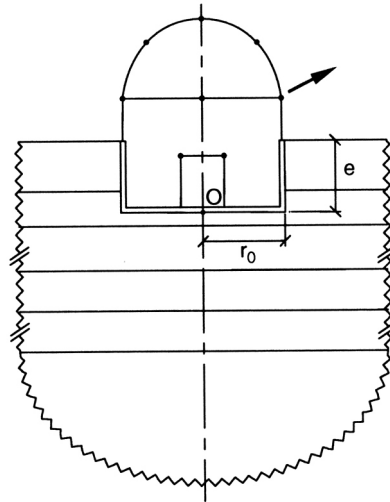
شکل ۳-۱ پی متقارن محوری مدفون در لایه‌های خاک با تکیه‌گاه گیردار.



شکل ۴-۱ پی کاملاً مدفون در نیم‌فضای خاک چندلایه.

می‌توان از طریق معادل‌سازی یک مقدار معین مربوط به پی عمومی با مقدار متناظر آن در حالت متقارن محوری انجام داد. برای مثال، هنگامی که درجات آزادی انتقالی حاکم هستند، مساحت‌ها در مقطع افقی را می‌توان معادل در نظر گرفت، اما زمانی که درجات آزادی دورانی حاکم باشند، ممان‌های اینرسی در مقطع افقی را می‌توان معادل قرار داد. در بیشتر کاربردها، سازه نیز با سطح مشترک سازه - خاک به همراه دیواره و تکیه‌گاه صلب پی وجود دارد (شکل ۱-۵). در این حالت دو زیرسازه شامل پی مدفون در خاک و سازه وجود دارد. این دو زیرسازه در نقطه O به یکدیگر متصل‌اند و یک سیستم کوپل را تشکیل

۱. مقدمه ۵



شکل ۱-۵ اندرکنش خاک - سازه با سازه مدفون در نیم‌فضای خاک چندلایه.

می‌دهند. این سیستم یک مسئله اندرکنش دینامیکی خاک بدون مرز - سازه را تشکیل می‌دهد. بارهای خارجی را نیز می‌توان به سازه اعمال نمود و همان‌طور که اشاره شد، تحریک دینامیکی می‌تواند از طریق خاک نیز اعمال شود (به‌طور مثال توسط امواج لرزه‌ای). در چنین مسایلی، پاسخ‌های سازه و با تعمیم کمتر، پاسخ‌های خاک باید تعیین گردند. کوپل زیرسازه‌ها، تعادل و سازگاری تغییرمکان‌ها و همچنین دوران‌ها در نقطه O را به‌وجود می‌آورد. با وجود این، رفتار دینامیکی خاک بدون مرز به‌عنوان یک حوزه نیمه نامحدود، به‌میزان قابل توجهی با رفتار سازه محدود با ابعاد متناهی تفاوت دارد. حرکت سطح مشترک سازه - خاک، موجب انتشار امواج در خاک در تمام جهتها به سمت بی‌نهایت می‌گردد. انعکاس‌هایی در سطح آزاد پدید می‌آید و هر دو نوع امواج انعکاسی و انکساری در سطوح مشترک لایه‌های خاک به وجود می‌آیند. این الگوی پیچیده موج، موجب تابش انرژی به سمت بی‌نهایت در خارج از سیستم دینامیکی می‌گردد. بنابراین، برخلاف سازه محدود، خاک بدون مرز به‌عنوان یک چاه انرژی عمل می‌کند و حتی در یک سیستم خطی موجب ایجاد میرایی (که به میرایی تابشی معروف است) می‌گردد. چالش در تحلیل اندرکنش دینامیکی خاک - سازه، شامل مدل‌سازی خاک نشان داده شده در شکل ۱ - ۱ می‌باشد.

۶ تحلیل ارتعاشات پی

به این ترتیب، پی صلب مدفون در یک نیم‌فضای خاک چندلایه یا به عبارت دیگر، خاک چندلایه با گودبرداری توسط یک سطح مشترک صلب مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات دینامیکی این زیرسازه در نقطه O بر روی سطح مشترک با زیرسازه دیگر یعنی سازه تعریف می‌شود. برای تحریک لرزه‌ای، دو مقدار باید تعیین گردد: نخست، رابطه نیروی اندرکنش - تغییرمکان که سهم خاک بدون مرز را در سختی دینامیکی معادلات کوپل تعیین می‌نماید و دوم، حرکت ورودی مؤثر پی که از تحریک لرزه‌ای اعمال شده از طریق خاک ناشی می‌شود.

از آنجا که خاک بدون مرز به صورت خطی باقی می‌ماند، تحلیل دینامیکی را می‌توان در حوزه فرکانس انجام داد. همان‌گونه که در پیوست‌های الف - ۳ و الف - ۴ خلاصه شده است، تحریک دینامیکی در حوزه زمان به صورت مجموع یک سری از مؤلفه‌های هارمونیک بیان می‌گردد (سری و انتگرال فوریه). بنابراین کافی است یک تحریک هارمونیک گسسته با فرکانس ویژه ω را مورد بررسی قرار داد که همان‌گونه که در پیوست الف - ۱ مطرح شده، به وسیله دامنه مختلط متناظر توصیف می‌شود. دامنه پاسخ برای این تحریک هارمونیک از حاصل ضرب تابع پاسخ فرکانس مختلط (بررسی شده در پیوست الف - ۲) در دامنه تحریک تبعیت می‌کند.

به طور کلی، بارگذاری اعمال شده به سازه به صورت متقارن محوری نخواهد بود. رابطه نیروی اندرکنش - تغییرمکان برای تحریک هارمونیک در نقطه O (شکل ۱ - ۱) برابر است با:

$$\{P(\omega)\} = [S(\omega)]\{u(\omega)\} \quad (1 - 1)$$

که در آن، $\{u(\omega)\}$ دامنه‌های سه تغییرمکان و سه دوران در O، $\{P(\omega)\}$ دامنه‌های سه نیرو و سه لنگر در O و $[S(\omega)]$ ماتریس سختی دینامیکی، تابع پاسخ فرکانس مختلط، را نشان می‌دهد. از آنجا که پی دارای تقارن محوری است، درجات آزادی قائم و پیچشی کوپل نیستند. با این حال، کوپل برای درجات آزادی افقی و دورانی (چرخشی) وجود دارد که به یک عبارت غیرقطری در $[S(\omega)]$ می‌انجامد. در معادله اصلی حرکت سیستم کوپل سازه - خاک که در پیوست ب - ۱ به دست آمده، این ماتریس سختی دینامیکی به صورت $[S_{00}^g(\omega)]$

۱. مقدمه ۷

نام‌گذاری شده است (رابطه ب - ۴، شکل ب - ۲). (خاک بدون مرز با گودبرداری نیز به عنوان سیستم خاک 'زمین' نمایش داده شده که به توان (بالانویس) g می‌انجامد.)

برای هر مؤلفه ضریب $S(\omega)$ از ماتریس، رابطه

$$P(\omega) = S(\omega)u(\omega) \quad (۱ - ۲)$$

با حذف نمودن اندیس‌هایی که موقعیت مؤلفه ضریب را نشان می‌دهند، فرمول‌بندی می‌شود. در دینامیک پی، می‌توان فرکانس بدون بعد را به صورت زیر تعریف نمود:

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{c_{s1}} \quad (۱ - ۳)$$

که در آن r_0 بیانگر طول مشخصه پی، به طور مثال شعاع استوانه، و c_{s1} سرعت موج برشی در اولین لایه خاک می‌باشد.

$$c_{s1} = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}} \quad (۱ - ۴)$$

با استفاده از ضریب سختی K به منظور بدون بعد نمودن سختی دینامیکی، رابطه

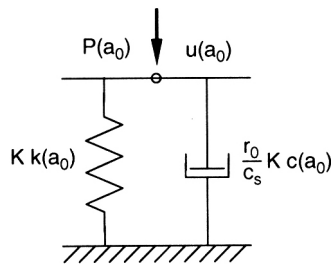
$$S(a_0) = K[k(a_0) + ia_0c(a_0)] \quad (۱ - ۵)$$

فرمول‌بندی می‌شود. (این تجزیه در پیوست الف - ۲ (رابطه الف - ۱۷) نیز با عبارت‌های بسیار ساده $k(a_0)$ و $c(a_0)$ (رابطه الف - ۱۸) معرفی شده است.) ضریب فنر بدون بعد $k(a_0)$ نیرویی را توصیف می‌کند که با تغییر مکان هم‌فاز است و ضریب میرایی بدون بعد $c(a_0)$ نیرویی را بیان می‌کند که دارای اختلاف فاز 90° می‌باشد. بنابراین، ضریب سختی دینامیکی $S(a_0)$ را می‌توان به صورت یک فنر با ضریب وابسته به فرکانس $K k(a_0)$ و یک میراگر موازی با ضریب وابسته به فرکانس $(r_0/c_{s1})Kc(a_0)$ تفسیر نمود (از آنجایی که مطابق رابطه الف - ۹ داریم $\dot{u}(a_0) = i\omega u(a_0)$). این رابطه در شکل ۱ - ۶ نمایش داده شده است. ضریب سختی دینامیکی به صورت مختلط می‌باشد که دارای بخش‌های حقیقی و موهومی است. هنگامی که تنها مقدار آن باید مورد بررسی قرار گیرد، به طور مثال برای کنترل دقت، معمولاً مقدار

$$|S(a_0)| = K\sqrt{k^2(a_0) + [a_0c(a_0)]^2} \quad (۱ - ۶)$$

۸ تحلیل ارتعاشات پی

انتخاب می‌شود که نمایانگر بزرگترین مقدار نیروی $P(a_0)$ برای یک مقدار واحد $u(a_0)$ است. (این رابطه مشابه استدلالی است که در کاربرد تحلیل طیف پاسخ مورد استفاده قرار می‌گیرد.)



شکل ۱-۶ تفسیر فیزیکی ضریب سختی دینامیکی برای تحریک هارمونیک به صورت فنر و میراگر موازی با ضرایب وابسته به فرکانس.

حرکت ورودی مؤثر پی برابر با حرکت خاک بدون مرز است که شامل گودبرداری با یک سطح مشترک صلب (سیستم زمین) می‌باشد که در اثر امواج لرزه‌ای ایجاد شده (شکل ب - ۲) و به وسیله دامنه‌های $\{u_0^g(\omega)\}$ توصیف می‌گردد. در این مرحله، تنها ارائه یک توصیف کیفی بدون هیچ معادله‌ای امکان‌پذیر است. همان‌طور که اشاره شد، تنها امواج دارای انتشار قائم در میدان آزاد در نظر گرفته می‌شوند. در حالت کلی، هنگامی که حرکت به سمت سطح آزاد انتشار می‌یابد، تشدید می‌گردد. روش تحلیل میدان آزاد برای تحریک هارمونیک در پیوست ب - ۲ بیان شده است. زلزله افقی با حرکت جزء افقی به صورت شماتیک در سمت چپ شکل ۱ - ۲ - الف نشان داده شده است. سطح مشترک صلب در طول گودبرداری به یک حرکت افقی میانگین در عمق دفن شده می‌انجامد و از آنجا که حرکت میدان آزاد در سطح آزاد و تراز تکیه‌گاه متفاوت است، چرخش (دوران) نیز به وجود می‌آید. این دو مؤلفه حرکت ورودی مؤثر پی در سمت راست شکل ۱ - ۲ - الف نشان داده شده‌اند. زلزله قائم با حرکت جزء قائم در میدان آزاد در سمت چپ شکل ۱ - ۲ - ب نمایش داده شده است. همان‌طور که در سمت راست شکل ۱ - ۲ - ب نشان داده شده است، سطح مشترک صلب موجب ایجاد یک مؤلفه قائم برای حرکت ورودی مؤثر پی می‌گردد که در

۱. مقدمه ۹

عمق دفن شده میانگین‌گیری شده است. برای یک پی سطحی، حرکت ورودی مؤثر پی با تغییر مکان متناظر میدان آزاد در سطح آزاد برابر است. هیچ مؤلفه دورانی نیز به وجود نمی‌آید.

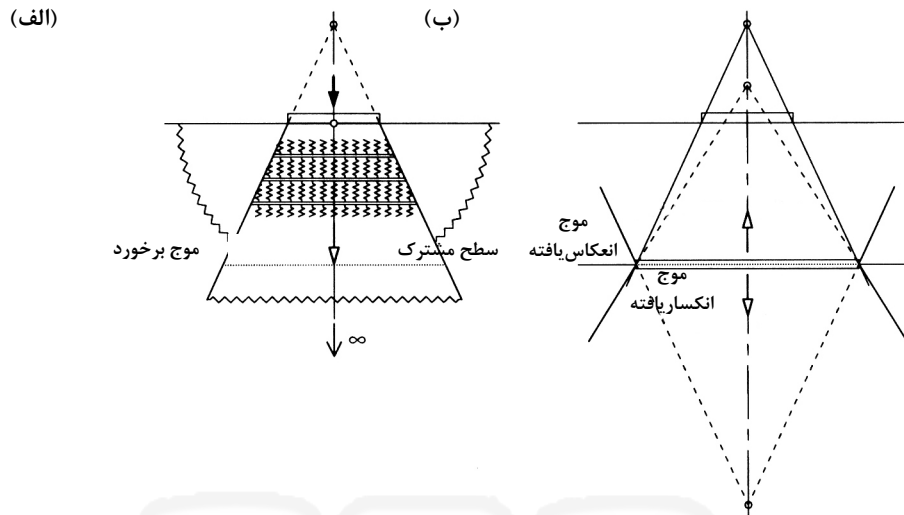
حرکت ورودی مؤثر پی با دامنه‌های $\{u_0^g(\omega)\}$ ، در سمت راست معادله اصلی حرکت برای تحلیل اندرکنش خاک - سازه وجود دارد که در پیوست ب - ۱ (رابطه ب - ۴) استخراج شده است.

ماتریس سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی بر مبنای روش مقاومت مصالح یک‌بعدی محاسبه می‌شوند. در اینجا حرکت ورودی مؤثر پی با عبارت‌های کلی با در نظر گرفتن ضریب سختی دینامیکی در جهت قائم برای یک پی سطحی شرح داده می‌شود. این روش برای سایر درجات آزادی نیز کاربرد دارد و می‌تواند به پی مدفون تعمیم داده شود که علاوه بر سختی دینامیکی، حرکت ورودی مؤثر پی با همان فرضیات فرمول‌بندی شود. در این مرحله، تنها می‌توان مفهوم اصلی را بدون ارائه جزئیات و یا استخراج نتایج فراهم نمود.

به منظور ایجاد روش مقاومت مصالح، تقریب‌های فیزیکی از قبیل تعیین رفتار تغییر شکل (مقاطع صفحه به صورت صفحه باقی می‌ماند) معرفی می‌شوند که این تقریب‌ها فرمول‌بندی ریاضی را نیز ساده‌سازی می‌نمایند. روش مقاومت مصالح یک‌بعدی، میله‌ها و تیرهای مخروطی را مورد بررسی قرار می‌دهد که در بحث بعد با عبارت مخروط‌ها نامیده می‌شوند.

درجه آزادی قائم یک پی دایره‌ای (دیسک نیز نامیده می‌شود) بر روی سطح یک نیم‌فضای خاک همگن الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۱ - ۷ - الف). به منظور تعیین رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان دیسک واقع بر روی نیم‌فضا و همچنین سختی دینامیکی آن، تغییر مکان دیسک تعیین شده و نیروی اندرکنش متناظر (بار اعمال شده بر روی دیسک) محاسبه می‌شود. نیم‌فضای زیر دیسک به صورت یک میله ناقص نیمه نامحدود با سطح مقطع متغیر، مشابه یک مخروط با همان مشخصات مصالح نیم‌فضا، مدل‌سازی می‌گردد. بار اعمال شده به دیسک واقع بر روی سطح آزاد یک نیم‌فضا، موجب ایجاد تنش‌هایی بر روی سطح شده که این سطح به دلیل گسترش هندسی با ازدیاد عمق افزایش می‌یابد. در این مخروط اولیه، با افزایش مساحت سطح مقطع در جهت انتشار موج به سمت بی‌نهایت، موج از دیسک بارگذاری شده به سمت بیرون انتشار می‌یابد (در این حالت

۱۰ تحلیل ارتعاشات پی



شکل ۱ - ۷ انتشار موج در مخروطها. الف) مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون؛ ب) امواج انعکاس یافته و انکسار یافته منتشر شده در مخروطهای خود در محل ناپیوستگی مصالح.

رو به پایین است) و کرنشهای محوری به وجود می‌آیند (شکل ۱ - ۷ - الف). این بخش به عنوان اولین بلوک سازنده در تشکیل روش محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. در حالت نیم‌فضای چندلایه، موج انتشار یافته در مخروط اولیه، به عنوان یک موج برخورد، با ناپیوستگی مصالح که متناظر با سطح مشترک لایه‌ای است، برخورد می‌کند (شکل ۱ - ۷ - الف). این برخورد، دو موج جدید را به وجود می‌آورد (شکل ۱ - ۷ - ب)، یک موج انعکاس یافته با انتشار رو به بالا و یک موج انکسار یافته با انتشار رو به پایین که هر کدام در مخروط (اولیه) خود انتشار یافته و دوباره مساحت سطح مقطع مخروط در جهت انتشار موج افزایش می‌یابد. این بخش، دومین بلوک سازنده را تشکیل می‌دهد. این امواج تولید شده نیز به عنوان امواج برخورد در مرحله بعد، با ناپیوستگی‌های مصالح مواجه شده و موجب ایجاد انعکاس‌ها و انکسارهای اضافی می‌گردند. با دنبال نمودن متوالی انعکاس و انکسار هر موج برخورد، الگوی موج برهم نهی شده را می‌توان برای یک ساختگاه چندلایه تا یک مرحله معین ایجاد نمود.

در محدوده فرضیات مقاومت مصالح، روش محاسباتی برای یک پی سطحی به صورت تحلیلی است. وارد کردن هیچ تقریب عددی مورد نیاز نیست.

استفاده از مدل‌های مخروطی در واقع به آفت دقت در مقایسه با کاربرد روش‌های دقیق بر مبنای الاستودینامیک سه‌بعدی می‌انجامد. با این حال، این آفت دقت با مزایای بسیاری جبران می‌گردد. روش مقاومت مصالح با استفاده از مخروط‌ها به درک فیزیکی همراه با وضوح مفهومی می‌انجامد و به سادگی قابل استفاده و محاسبه می‌باشد، زیرا راه‌حل ریاضی به صورت ساده شده است و عمومیت کافی (ساختگاه چندلایه، مدفون بودن، تمام فرکانس‌ها) و دقت مهندسی قابل قبول را تأمین می‌نماید. در هر حال، دقت هر تحلیل، به دلیل عدم قطعیت‌های بسیاری که برخی از آنها هرگز قابل برطرف شدن نیست، محدود می‌باشد (به طور مثال تعریف بارهای دینامیکی و مقادیر مشخصات دینامیکی خاک در تحلیل پی یک دستگاه). بنابراین، انجام مطالعات پارامتریک ضروری است. تحلیل با مخروط‌ها، متناسب با اندازه و اقتصاد پروژه‌های عملی مهندسی است. از این رو، مدل‌های مخروطی باید برای موارد تحلیل ارتعاش پی و اندرکنش دینامیکی خاک - سازه، در هر زمان ممکن در دفتر مهندسی مورد استفاده قرار گیرد.

۱ - ۲ سازماندهی متن

روش زیر، به منظور دستیابی به هدف کتاب که ارائه روش مقاومت مصالح با مخروط‌ها برای تحلیل ارتعاش‌های پی مدفون است و همچنین به منظور تشریح کامل و تکمیل یک برنامه کامپیوتری برای موارد عملی با کمترین پیش‌نیازهای ممکن، مورد استفاده قرار گرفته است. فصل ۱ هدف تحلیل ارتعاش پی را بیان می‌نماید، مسئله را تعریف می‌کند و چگونگی پردازش بعدی نتایج، سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی را نشان می‌دهد. همچنین یک نگاه اجمالی خلاصه به مدل‌های مخروطی را فراهم می‌نماید. فصل ۲ مفاهیم مدل‌های مخروطی را معرفی می‌نماید. پس از توصیف ویژگی‌های روش‌های دقیق که در این کتاب مورد بررسی قرار نگرفته، انتشار موج در مخروط‌ها در حوزه زمان، با تأکید بر میرایی تابشی که در مخروط‌های نیمه‌نامحدود پدید می‌آید، بررسی شده است. تنها آن جنبه‌هایی معرفی شده که به منظور ایجاد زمینه فهم موضوع برای خواننده ضروری است. دو بلوک سازنده مفهومی که مبنای روش محاسباتی را تشکیل می‌دهند، مطرح شده است. ویژگی‌های مدل‌های مخروطی نیز مورد بحث قرار گرفته است.

فصل‌های ۳، ۴ و ۵ با ارائه استخراج تفصیلی تمام روابط، هسته کتاب را تشکیل می‌دهد. متخصص در زمینه تحلیل ارتعاش پی با عبور از فصل ۲ می‌تواند از فصل ۳ شروع نماید. فصل ۳ مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون را مورد بررسی قرار می‌دهد که پیشتر در شکل ۱ - ۷ - الف نمایش داده شد که اولین بلوک سازنده روش محاسباتی است. به این ترتیب، محاسبه سختی دینامیکی پی بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن را امکان‌پذیر می‌نماید.

فصل ۴ انعکاس و انکسار موج را در محل ناپیوستگی مصالح که سطح مشترک لایه‌ای را نشان داده، بررسی می‌نماید که دومین بلوک سازنده را تشکیل می‌دهد (شکل ۱ - ۷ - ب). سختی دینامیکی پی بر روی سطح یک لایه واقع بر روی یک نیم‌فضای انعطاف‌پذیر تعیین شده است. همچنین یک برنامه کامپیوتری که دو بلوک سازنده را به اجرا در می‌آورد، معرفی شده است.

فصل ۵ تقسیم‌بندی فضایی را برای پی مدفون در یک نیم‌فضای چندلایه با مجموعه‌ای از دیسک‌های مدفون توصیف می‌نماید. پس از تعیین انعطاف‌پذیری دینامیکی میدان آزاد نسبت به این دیسک‌ها که سپس معکوس می‌شود، سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی مدفون محاسبه می‌شود که از طریق حرکت جسم صلب دیواره و کاهش جرم محبوس گودبرداری انجام می‌گردد. همچنین کاربرد کامپیوتری به همراه مثال‌های گویا و ساده مورد بحث قرار می‌گیرد.

فصل ۶ به ارزیابی دقت می‌پردازد. مطالعه پارامتریک برای یک پی در دو حالت سطحی و مدفون در یک نیم‌فضای چندلایه که می‌تواند در تکیه‌گاه خود نیز گیردار باشد، انجام شده است. یک نیم‌فضای خاک با تعداد لایه‌های بسیار زیاد و همچنین رفتار زیر فرکانس قطع برای یک ساختگاه میرا نشده گیردار در تکیه‌گاه مورد بررسی قرار گرفته است. یک نیم‌بیضی و یک کره کاملاً مدفون نیز بررسی شده است.

فصل ۷ کاربردهای مهندسی را ارائه نموده که ارتعاش پی یک دستگاه پیستونی، تحلیل لرزه‌ای اندرکنش خاک - سازه و تحلیل دینامیکی یک برج توربین باد با پی صندوقچه‌ای مکشی را مورد بررسی قرار می‌دهد.

فصل ۸ شامل توضیحات پایانی است. روش مقاومت مصالح با مخروط‌ها به دقت مهندسی کافی در تعیین سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی برای پی‌های سطحی

۱. مقدمه ۱۳

و مدفون به ازای تغییرات زیاد پارامترها می‌انجامد. مدل‌های مخروطی بر مبنای انتشار موج یک بعدی با انعکاس‌ها و انکسارها در ناپیوستگی مصالح برای تحلیل‌های عملی روزمره ارتعاش پی به خوبی مناسب‌اند، زیرا از عمومیت کافی برخوردار بوده، دقت خوب حاصل شده و نیز این روش درک فیزیکی را فراهم نموده و کاربرد آن آسان است.

«پیوست الف» اجزای کلیدی تحلیل در حوزه فرکانس بر مبنای تحریک هارمونیک را گسترش می‌دهد.

«پیوست ب» معادلات اساسی حرکت اندرکنش دینامیکی خاک - سازه با مشارکت خاک، شامل سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی برای امواج لرزه‌ای را استخراج می‌نماید.

«پیوست پ» انتشار موج در یک میله منشوری نیمه نامحدود با ناپیوستگی‌های مصالح را که در حوزه زمان تحلیل شده است، مورد بحث قرار می‌دهد.

«پیوست ت» پژوهش‌های پیشگام را که به مدل‌های مخروطی می‌انجامد، به همراه مراجع منتخب مرور می‌نماید. در یک کتاب مقدماتی مناسب نیست که منابع علمی را در سراسر کتاب معرفی نمود، زیرا به جای پرداختن به خود روش، به توصیف تاریخچه آن می‌انجامد.

«پیوست ث» برنامه کامپیوتری قابل اجرای (CONAN (CONE ANalysis را مورد بررسی قرار می‌دهد که می‌توان آن را برای تحلیل دینامیکی پی‌های واقعی مورد استفاده قرار داد. یک راهنمای کاربر کامل شامل جزئیات ورودی و خروجی، همراه با مثال‌هایی فراهم شده است.

«پیوست ج» کاربردهای کامل برنامه MATLAB، مربوط به تمام روش‌های بررسی شده در فصل‌های ۳، ۴ و ۵ را به همراه توضیحات تفصیلی چگونگی عملکرد هر کدام فراهم نموده است. دستورالعمل‌های MATLAB به خوبی تفسیر شده و یک آدرس وب اعلام شده که به خواننده امکان می‌دهد تا به ویرایش‌های به روز شده آن دست یابد.

«پیوست چ» تحلیل مستقیم در حوزه زمان توسط مخروط‌ها را به عنوان یک تعمیم توصیف می‌نماید.

در پایان، در واژه‌نامه‌ای اصطلاحات فنی کلیدی به زبان‌های مختلف ترجمه شده است.



۲

مفاهیم مدل مخروطی

این فصل مبانی روش مقاومت مصالح یک‌بعدی با میله‌ها و تیرهای مخروطی را که از آنها در اینجا به عنوان مخروط‌ها یاد می‌شود، مورد بحث قرار می‌دهد. مفاهیم کلیدی انتشار موج در مخروط‌ها شرح داده شده است. مروری کلی بر روش محاسباتی برای تعیین پاسخ دینامیکی یک پی مدفون در نیم‌فضای چندلایه فراهم شده است. روش برخورد با موارد مختلف در این فصل تا حد زیادی به صورت توصیفی بدون مشخص کردن معادلات است. برای جنبه‌های منتخب، برخی از جزییات نمایش داده شده و فرمول‌هایی که اغلب در حوزه زمان توسعه یافته، ارائه شده است. این فرآیند به خواننده امکان می‌دهد تا به درک فیزیکی دست یابد و در عین حال به روش ارائه شده اطمینان حاصل کند. استخراج دقیق و نظام‌مند تمام روابط مورد نیاز به فصل‌های ۳، ۴ و ۵ موکول شده است.

بخش ۲ - ۱ روش تحلیل دقیق را توصیف نموده و آن را با روش مقاومت مصالح با استفاده از مخروط‌ها مقایسه می‌نماید. بخش ۲ - ۲ انتشار موج در یک مخروط ناقص نیمه نامحدود همگن را ارائه می‌دهد. با ایجاد مخروط به یک روش مناسب، پی سطحی واقع بر روی نیم‌فضای چندلایه را می‌توان تحلیل نمود. بخش ۲ - ۳ انتشار موج با انعکاس و انکسار به وجود آمده در محل ناپیوستگی مصالح در یک مخروط را مورد بررسی قرار می‌دهد.

به این ترتیب می‌توان یک پی سطحی واقع بر روی یک لایه گیردار در تکیه‌گاه را فرمول‌بندی نمود. بخش ۲ - ۴ انتشار موج در قسمت‌های مختلف مخروط را برای دیسک واقع بر روی سطح نیم‌فضای چندلایه مورد بازبینی قرار می‌دهد. بخش ۲ - ۵ یک مخروط دوبل را تعریف می‌نماید که توصیف انتشار موج در قسمت‌های مختلف مخروط را برای یک دیسک مدفون در نیم‌فضای چندلایه ممکن می‌سازد. بخش ۲ - ۶ خلاصه روش محاسباتی را ارائه می‌کند که سختی دینامیکی یک پی مدفون را با ترکیب کردن عناصر انتشار موج که در بخش‌های ۲ - ۲ تا ۲ - ۵ ارائه شده، محاسبه می‌نماید. به ویژه، اهمیت دو بلوک سازنده روش تحلیل با مخروط‌ها مورد تأکید قرار می‌گیرد که مشتمل بر مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون (بخش ۲ - ۲) و انعکاس و انکسار موج در محل ناپیوستگی مصالح در یک مخروط (بخش ۲ - ۳) است. بخش ۲ - ۷ ویژگی‌ها و الزامات مدل‌های مخروطی را مورد بحث قرار می‌دهد.

به منظور فراهم نمودن درک فیزیکی به یک شیوه مستقیم، تمام اثبات‌ها در این فصل در حوزه زمان انجام شده که حوزه طبیعی علم دینامیک است. حوزه طبیعی دینامیک، توسعه پاسخ را از طریق زمان دنبال می‌کند.

۲ - ۱ روش‌های دقیق

برای محاسبه سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی برای تحریک لرزه‌ای روش‌هایی دقیق وجود دارد. این روش‌ها شامل روش اجزای مرزی، روش‌های اجزای محدود پیچیده از قبیل روش لایه نازک (روش مرزی پایدار)، روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده و روش دیرپچله به نیومن می‌باشد.

این روش‌های دقیق به یک پیش‌زمینه تئوریک قوی نیاز دارند. تخصصی قابل توجه نیز برای ایده‌آل‌سازی سیستم دینامیکی لازم است. آماده‌سازی داده‌ها و تفسیر نتایج باید به میزانی قابل توجه انجام گردد. هزینه محاسباتی برای تنها یک مرتبه اجرا زیاد است و از نقطه نظر اقتصادی، انجام مطالعات لازم پارامتریک و وارسی تدابیر طراحی جایگزین را مشکل می‌سازد. به این ترتیب، روش‌های دقیق می‌تواند یک حس نادرست از ایمنی را در

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۱۷

کاربر ایجاد نماید. پیچیدگی ریاضی درک فیزیکی را از بین می‌برد. روش‌های دقیق بیشتر به رشته مکانیک محاسباتی کاربردی تا مهندسی عمران تعلق دارد. مهندسان به استفاده از این روش‌ها اطمینان ندارند. این روش‌ها را می‌توان تنها برای پروژه‌های بزرگ یا تاسیسات حیاتی یا بحرانی از قبیل نیروگاه‌های هسته‌ای، پناهگاه‌های نظامی و سد‌ها، با بودجه متناظر و زمان موجود به کار برد. افزون بر آن، چنین روش‌هایی باید در مواردی مورد استفاده قرار گیرند که از طریق روش مقاومت مصالح انجام نشده باشند.

بنابراین، بیشتر تحلیل‌های ارتعاش پی با استفاده از روش‌های دقیق انجام نخواهد شد، بلکه روش‌های مقاومت مصالح به کار برده می‌شوند. فرمول‌بندی‌های متعددی وجود دارد که در مرجع [۳۷] شرح داده شده است. سه نوع مختلف مدل وجود دارد: مدل‌های پارامتر متمرکز، متشکل از تعدادی درجات آزادی متصل شده با فنرها، میراگرها و جرم‌هایی با ضرایب ثابت مستقل از فرکانس؛ مدل‌هایی بر مبنای الگوهای موج تعیین شده در صفحه افقی امواج یک‌بعدی حجمی و سطحی و امواج استوانه‌ای؛ و مدل‌های مخروطی. تنها مدل آخر در این کتاب شرح داده شده است که می‌توان آن را به عنوان یک روش مقاومت مصالح یک‌بعدی در نظر گرفت.

در روش مقاومت مصالح، تئوری الاستودینامیک سه‌بعدی به عنوان یک نوع بسیار تفصیلی در نظر گرفته می‌شود. کافی است رفتار تغییرشکل معینی را فرض نمود. برای اشکال ساده از قبیل میله‌ها و تیرها، یک توصیف یک‌بعدی (مقاطع صفحه به صورت صفحه باقی می‌مانند) به کار برده می‌شود که به یک روش تقریبی می‌انجامد. تمام متغیرها به محور ارجاع داده می‌شوند. در مهندسی سازه، اغلب تحلیل‌های تنش بر مبنای روش مقاومت مصالح با استفاده از میله‌ها و تیرها انجام می‌شود که مشخصات سطح مقطع آنها می‌تواند در طول محور تغییر پیدا کند. این روش به خوبی توسعه یافته و به سیستم‌های سازه‌ای پیچیده از قبیل یک پل پیش‌تنیده مورب خمیده با بارهای متحرک این امکان را می‌دهد که با میله‌ها و تیرهای یک‌بعدی مدل‌سازی شوند. در مهندسی سازه، اجزای باربری که باید تحلیل شوند، تمایل دارند از یک جهت غالب برای تعیین محور و مشخصات سطح مقطع برخوردار باشند. با این حال، در مهندسی ژئوتکنیک، خاک و سنگ از نوع محیط سه‌بعدی به شمار می‌روند. بنابراین، در مهندسی ژئوتکنیک انتخاب محور و به ویژه

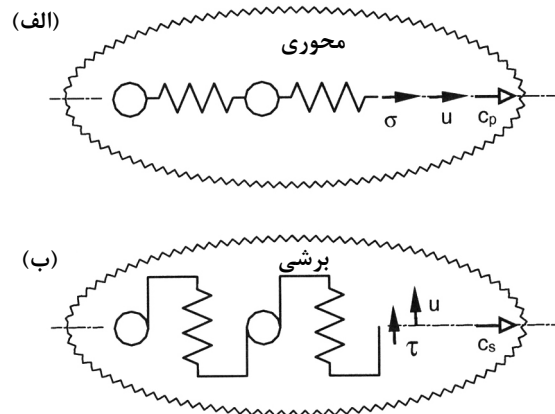
مشخصات مصالح بسیار دشوارتر است چرا که باید قادر به نمایش دادن تمام ویژگی‌های اساسی با استفاده از رفتار تغییرشکل تعیین شده باشند. از آنجا که می‌توان از آزادی انتخاب به منظور اعمال یک ویژگی مطلوب استفاده نمود. این چالش ممکن است سودمند باشد. این مورد در بخش بعدی نمایش داده شده است که در آن زاویه بازشدگی مدل مخروط که به مشخصات سطح مقطع می‌انجامد، از طریق معادل نمودن سختی استاتیکی مخروط یک بعدی با سختی استاتیکی پاسخ سه بعدی دقیق دیسک واقع بر روی نیم‌فضا تعیین می‌شود. به این ترتیب، برای حالت‌های استاتیکی، مدل‌های مخروطی پاسخ دقیق دیسک را بازسازی می‌نمایند.

۲-۲ انتشار موج در یک مخروط ناقص نیمه نامحدود همگن

در این بخش، یک پی دایره‌ای واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن واری می‌شود. پی صلب بدون جرم نیز یک دیسک نامیده می‌شود. تمام درجات آزادی مورد بررسی قرار می‌گیرند. این بخش، اولین بلوک سازنده روش محاسباتی را معرفی می‌نماید. همان‌گونه که در بحث هدف تحلیل ارتعاش پی در بخش ۱-۱ بیان شد، بدون مرز بودن نیم‌فضا منجر به انتشار موج به سمت بی‌نهایت می‌شود. یک سیستم نیمه نامحدود ساده یعنی میله منشوری، در پیوست پ مورد بررسی قرار گرفته است. برای تغییر مکان محوری معین (شکل پ - ۱ - الف)، یک موج از این منبع آشفستگی به سمت بی‌نهایت منتشر می‌شود و کرنش‌های محوری را با سرعت موج c در میله، که در رابطه پ - ۴ مشخص شده، به وجود می‌آورد.

در یک فضای کامل ایزوتروپیک همگن سه بعدی دو نوع امواج حجمی شامل امواج انبساطی (امواج P) و امواج برشی (امواج S) وجود دارند. روش سودمند این است که محیط را به صورت تشکیل یافته از اجزای جرم متصل شده به وسیله فنرها در نظر گرفت. هنگامی که یک آشفستگی بر یک جزء جرم اعمال می‌شود، از طریق فنرهای متصل به آن به جزء جرم مجاور انتقال می‌یابد (شکل ۲ - ۱). هنگامی که حرکت جزء با جهت انتشار موج

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۱۹



شکل ۲ - ۱ امواج حجمی در فضای کامل. (الف) امواج انبساطی با حرکت جزء موازی با جهت انتشار موج؛ (ب) امواج برشی با حرکت جزء عمود بر جهت انتشار موج.

موازی است (شکل ۲ - ۱ - الف)، وضعیتی مشابه امواج محوری در میله برقرار است. تغییر مکان‌های محوری u ، کرنش‌های محوری و تنش‌های عمودی σ وجود دارند. امواج با سرعت موج انبساطی مطابق رابطه زیر انتشار می‌یابند.

$$c_p = \sqrt{\frac{E_c}{\rho}} \quad (۱ - ۲)$$

که در آن E_c مدول مقید شده و ρ چگالی جرم است. اندیس p نشان می‌دهد که امواج انبساطی، امواج P (امواج اولیه) نیز نامیده می‌شوند. E_c را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$E_c = \lambda + 2G = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} 2G \quad (الف - ۲ - ۲)$$

که در آن، مقادیر ثابت λ و G (مدول برشی) برابرند با:

$$\lambda = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \quad (ب - ۲ - ۲)$$

$$G = \frac{1}{2(1 + \nu)} E \quad (پ - ۲ - ۲)$$

که در آن E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون می‌باشد. دقت کنید که برای $\nu \rightarrow 1/2$ (مصالح تراکم‌ناپذیر)، روابط $E_c \rightarrow \infty$ و $c_p \rightarrow \infty$ برقرار است. در این فصل تنها مصالح تراکم‌پذیر در نظر گرفته خواهند شد.

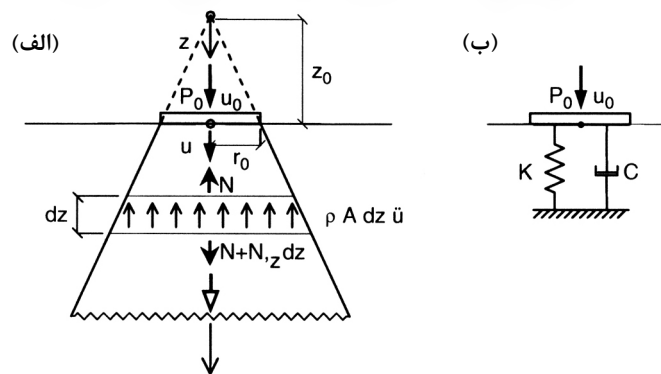
۲۰ تحلیل ارتعاشات پی

هنگامی که حرکت جزء عمود بر جهت انتشار موج است (شکل ۲ - ۱ - ب)، میله منشوری شکل پ - ۱ - الف را همچنان می‌توان برای نمایش به کار برد. سپس تغییر مکان معین به صورت عمود بر محور اعمال می‌شود که منجر به ایجاد کرنش‌های برشی و تنش‌های برشی می‌گردد. در فضای کامل، تغییر مکان‌های جانبی u ، کرنش‌های برشی و تنش‌های برشی τ وجود دارد. این /مواج برشی (امواج K یا امواج ثانویه) با سرعت موج برشی زیر منتشر می‌شوند.

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (۲ - ۳)$$

این دو نوع امواج حجمی در تشکیل مدل‌های مخروطی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

به عنوان مثال، درجه آزادی قائم یک دیسک با شعاع r_0 بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۲ - ۲). در روش مقاومت مصالح یک‌بعدی، این سیستم دینامیکی به عنوان یک میله ناقص نیمه نامحدود با یک محور قائم مدل‌سازی می‌شود. مساحت سطح مقطع، مشابه سطح مقطع یک مخروط، با ازدیاد عمق افزایش می‌یابد. انتخاب میله مخروطی بر مبنای این واقعیت صورت گرفته که هنگامی که باری



شکل ۲ - ۲ دیسک واقع بر روی سطح نیم‌فضای همگن. الف) مخروط ناقص نیمه نامحدود برای حرکت قائم با انتشار موج به سمت بیرون و تعادل عنصر بی‌نهایت کوچک؛ ب) مدل پارامتر متمرکز متشکل از فنر و میراگر معمولی موازی.

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۲۱

به دیسک واقع بر روی سطح آزاد یک نیم‌فضا اعمال می‌شود، تنش‌ها بر روی سطحی اثر نموده که آن سطح به دلیل پخش‌شدگی هندسی با ازدیاد عمق افزایش می‌یابد. این حالت برای مخروط نیز صادق است (هرچند جزئیات تغییرات فضایی متفاوت خواهند بود). امواج انبساطی با تغییر مکان‌های $u(z,t)$ ، در طول محور با سرعت موج انبساطی c_p منتشر می‌شود. کرنش‌های محوری ثابت درون سطح مقطع وجود دارند که متناظر با رفتار تغییر شکل (مقاطع صفحه به صورت صفحه باقی می‌مانند) است. الگوی موج سه‌بعدی پیچیده دقیق نیم‌فضا با امواج حجمی و سطحی و سه سرعت مختلف، با انتشار موج یک‌بعدی ساده تقریبی جایگزین می‌گردد که این انتشار موج یک‌بعدی با یک سرعت موج انبساطی ثابت مخروط کنترل می‌شود. برای مخروطی که درجه آزادی قائم را مدل‌سازی می‌کند، می‌توان مشخصات مصالح c_p ، ν و ρ را همان مقادیر مربوط به نیم‌فضا انتخاب نمود. به منظور تشکیل مخروط، زاویه بازشدگی بیان شده با نسبت ظاهری z_0 / r_0 (شکل ۲-۲ الف) باید تعیین گردد. به جای انتخاب کمابیش قراردادی، امکان اعمال یک ویژگی مطلوب در مدل مخروطی وجود دارد. زاویه بازشدگی مخروط از طریق معادل قرار دادن ضریب سختی استاتیکی مخروط ناقص نیمه‌نامحدود با ضریب سختی استاتیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضا که با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی تعیین شده، محاسبه می‌گردد. این معادل‌سازی نشان می‌دهد که زاویه بازشدگی تنها به نسبت پواسون ν (و درجه آزادی) وابسته است. در نتیجه برای حالت بارگذاری استاتیکی، مدل مخروط، منجر به به‌دست آوردن تغییر مکان دقیق دیسک واقع بر روی سطح (پی سطحی) می‌گردد. اعمال بار دینامیکی $P_0(t)$ به دیسک موجب انتشار رو به پایین موج به سمت بی‌نهایت می‌شود که به میرایی تابشی می‌انجامد. این حالت، مشابه میله منشوری نیمه نامحدود مورد بحث در پیوست پ است. یک دیسک بارگذاری شده نمایانگر آشفتگی، یک موج سرچشمه گرفته از دیسک با انتشار به سمت بیرون از آشفتگی را به وجود می‌آورد که مساحت سطح مقطع آن در جهت انتشار موج افزایش می‌یابد. در چارچوب روش محاسباتی، این مخروط مجاور دیسک با یک آشفتگی معین، مخروط اولیه نامیده می‌شود.

تحلیل مخروط نیمه‌نامحدود با ارتفاع رأس z_0 و شعاع r_0 در مقطع ناقص به تفصیل به شرح زیر ادامه می‌یابد که برای مدل کردن درجه آزادی قائم یک دیسک با

۲۲ تحلیل ارتعاشات پی

شعاع r_0 واقع بر روی سطح یک نیم‌فضا به کار می‌رود. مساحت سطح در عمق z برابر است با $A(z) = (z/z_0)^2 A_0$ که در آن $A_0 = \pi r_0^2$ بوده و z از رأس اندازه‌گیری می‌شود. مدول مقید شده E_c از c_p و ρ تبعیت می‌کند که در رابطه ۲ - ۱ مشخص شده است. $u(z,t)$ تغییر مکان محوری و $N(z,t)$ نیروی عمودی را نشان می‌دهد. معادله تعادل دینامیکی یک المان بی‌نهایت کوچک با در نظر گرفتن بارهای اینرسی (شکل ۲ - ۲ الف) به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$-N(z, t) + N(z, t) + N(z, t)_{,z} dz - \rho A(z) dz \ddot{u}(z, t) = 0 \quad (۴ - ۲)$$

$N(z, t)$ مشتق نسبی $N(z, t)$ نسبت به z ($= \partial N(z, t) / \partial z$) را نشان می‌دهد.

جایگزین نمودن رابطه نیرو - تغییر مکان (با استفاده از رابطه ۲ - ۱)

$$N(z, t) = \rho c_p^2 A(z) u(z, t)_{,z} \quad (۵ - ۲)$$

به معادله حرکت مخروط در حوزه زمان می‌انجامد که در آن A تابع معینی از z می‌باشد:

$$u(z, t)_{,zz} + \frac{2}{z} u(z, t)_{,z} - \frac{1}{c_p^2} \ddot{u}(z, t) = 0 \quad (۶ - ۲)$$

رابطه ۲ - ۶ را می‌توان به عنوان معادله موج یک‌بعدی بر حسب تابع $zu(z, t)$ به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$(zu(z, t))_{,zz} - \frac{1}{c_p^2} (z \ddot{u}(z, t)) = 0 \quad (۷ - ۲)$$

به منظور تعیین نسبت ظاهری z_0 / r_0 ، مخروط استاتیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای تغییر مکان u_0 دیسک به میزان معین، نیروی اندرکنش P_0 دیسک محاسبه می‌شود که برابر با مقدار منفی نیروی عمودی $N(z=z_0)$ است. با داشتن رابطه $\ddot{u}(z) = 0$ ، رابطه ۲ - ۷ به رابطه زیر می‌انجامد:

$$(z u(z))_{,zz} = 0 \quad (۸ - ۲)$$

که حل آن عبارت است از:

$$z u(z) = c_1 + c_2 z \quad (۹ - ۲)$$

و مقادیر ثابت انتگرال برابر c_1 و c_2 می‌باشد. با اعمال شرایط مرزی

$$u(z = z_0) = u_0 \quad (۲ - ۱۰ الف)$$

$$u(z \rightarrow \infty) = 0 \quad (۲ - ۱۰ ب)$$

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۲۳

رابطه زیر به دست می‌آید:

$$u(z) = \frac{z_0}{z} u_0 \quad (۱۱ - ۲)$$

که در آن

$$P_0 = -N(z = z_0) = -E_c \pi r_0^2 u_{,z}(z = z_0) \quad (۱۲ - ۲)$$

و با جایگزین نمودن مشتق محاسبه شده از رابطه ۲ - ۱۱ خواهیم داشت:

$$P_0 = \frac{E_c \pi r_0^2}{z_0} u_0 \quad (۱۳ - ۲)$$

این رابطه ضریب سختی استاتیکی مخروط را به صورت زیر تعریف می‌نماید:

$$K = \frac{E_c \pi r_0^2}{z_0} \quad (۱۴ - ۲)$$

حل فرم بسته معروف برای ضریب سختی استاتیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضا به صورت رابطه زیر می‌باشد که با استفاده از تئوری دقیق الاستیسیته استخراج شده است.

$$K_{exact} = \frac{4G r_0}{1 - \nu} \quad (۱۵ - ۲)$$

مطابقت دادن ضرایب سختی استاتیکی از طریق معادل نمودن روابط ۲ - ۱۴ و ۲ - ۱۵ و با استفاده از روابط ۲ - ۲ الف و ۲ - ۲ پ، به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi (1 - \nu)^2}{2 (1 - 2\nu)} \quad (۱۶ - ۲)$$

به این ترتیب، زاویه بازشدگی مخروط تنها به نسبت پواسون ν بستگی دارد.

با بازگشت به معادله موج مخروط (رابطه ۲ - ۷)، مشاهده می‌گردد که این معادله دیفرانسیل جزئی به همان شکل معادله مربوط به میله منشوری (رابطه پ - ۳)، اما برای تابع $zu(z, t)$ و نه برای تابع $u(z, t)$ می‌باشد. بنابراین، حل معروف معادله موج (رابطه پ - ۸) به روابط زیر می‌انجامد.

$$z u(z, t) = z_0 f\left(t - \frac{z - z_0}{c_p}\right) + z_0 g\left(t + \frac{z - z_0}{c_p}\right) \quad (الف - ۱۷ - ۲)$$

یا

$$u(z, t) = \frac{z_0}{z} f\left(t - \frac{z - z_0}{c_p}\right) + \frac{z_0}{z} g\left(t + \frac{z - z_0}{c_p}\right) \quad (ب - ۱۷ - ۲)$$

۲۴ تحلیل ارتعاشات پی

مقدار ثابت z_0 / c_p در متغیر وارد شده است که صفر شدن متغیر را در $t = 0$ و $z = z_0$ تضمین نماید. همان گونه که در ارتباط با رابطه پ - ۸ بحث شده، f و g به ترتیب امواج انتشار یافته در جهت‌های مثبت و منفی z با سرعت ثابت c_p را نشان می‌دهند. برخلاف انتشار موج در یک میله منشوری، شکل موج در یک مخروط ثابت باقی نمی‌ماند، بلکه به صورت معکوس با z (فاصله از رأس) متناسب است.

برای دیسک بارگذاری شده نمایش داده شده در شکل ۲ - ۲ تنها امواج انتشار یافته رو به پایین (جهت مثبت z) وجود دارند ($g = 0$) که به رابطه زیر می‌انجامد (رابطه ۲ - ۱۷ - ب).

$$u(z, t) = \frac{z_0}{z} f\left(t - \frac{z - z_0}{c_p}\right) \quad (۲ - ۱۸)$$

رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان دیسک در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد. با مشتق‌گیری از رابطه ۲ - ۱۸ نسبت به z ، مشتق فضایی تغییر مکان به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$u(z, t)_{,z} = -\frac{z_0}{z^2} f\left(t - \frac{z - z_0}{c_p}\right) - \frac{z_0}{c_p z} f'\left(t - \frac{z - z_0}{c_p}\right) \quad (۲ - ۱۹)$$

که در آن، f مشتق f را نسبت به متغیر $t - (z - z_0) / c_p$ نشان می‌دهد. در اینجا رابطه ۲ - ۵ در $z = z_0$ ارزیابی شده که امکان تعیین نیروی اندرکنش $P_0(t)$ را به صورت زیر فراهم می‌نماید.

$$P_0(t) = -N(z = z_0, t) = -E_c \pi r_0^2 u(z = z_0, t)_{,z} = \rho c_p^2 \pi r_0^2 \left(\frac{1}{z_0} f(t) + \frac{1}{c_p} f'(t)\right) \quad (۲ - ۲۰)$$

برای یک مقدار معین تغییر مکان دیسک $u_0(t)$ ، اعمال شرایط مرزی

$$u(z = z_0, t) = u_0(t) \quad (۲ - ۲۱)$$

در رابطه ۲ - ۱۸، به رابطه زیر می‌انجامد.

$$f(t) = u_0(t) \quad (۲ - ۲۲)$$

با جایگزین نمودن رابطه ۲ - ۲۲، رابطه ۲ - ۲۰ به صورت زیر بازنویسی می‌شود (از آنجا که $\dot{u}_0(t) = u'_0(t)$).

$$P_0(t) = \frac{\rho c_p^2 \pi r_0^2}{z_0} u_0(t) + \rho c_p \pi r_0^2 \dot{u}_0(t) \quad (۲ - ۲۳)$$

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۲۵

یا

$$P_0(t) = K u_0(t) + C \dot{u}_0(t) \quad (2 - 24)$$

در این رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان، K و ضرایب ثابت فنر و میراگر هستند.

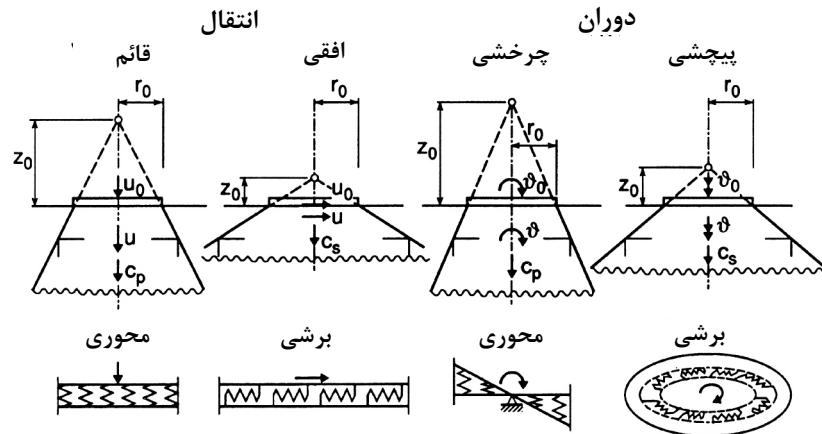
$$K = \frac{\rho c_p^2 \pi r_0^2}{z_0} \quad (2 - 25 \text{ الف})$$

$$C = \rho c_p \pi r_0^2 \quad (2 - 25 \text{ ب})$$

بنابراین یک فنر و میراگر معمولی موازی با ضرایب مشخص شده در رابطه ۲ - ۲۵ که یک مدل پارامتر متمرکز را تشکیل داده، مخروط را به صورت دقیق نمایش می‌دهند (شکل ۲ - ۲ ب). ضریب میراگر C (رابطه ۲ - ۲۵ ب) همان ضریب میله منشوری نیمه نامحدود (رابطه پ - ۱۸ با اندیس‌های مناسب اضافه شده) است. دوباره همان‌گونه که در پیوست پ بحث شده است، در این میراگر، انرژی موج انتشار یافته به سمت بی‌نهایت میرا می‌شود (میرایی تابشی).

در حد فرکانس بالا ($\omega \rightarrow \infty$)، می‌توان از نیروی فنر $Ku_0(t) = Ku_0(\omega)e^{i\omega t}$ صرف‌نظر کرد، زیرا بسیار کوچک‌تر از نیروی میراگر متناظر $C\dot{u}_0(t) = i\omega Cu_0(\omega)e^{i\omega t}$ است. این به این معنی است که انتشار موج مشابه یک میله منشوری، یعنی عمود بر دیسک، وجود دارد که الگوی دقیق موج یک دیسک واقع بر روی نیم‌فضا در حد فرکانس بالا است. بنابراین، مدل مخروطی نیز نتایجی دقیق را برای $\omega \rightarrow \infty$ به دست می‌آورد. همان‌گونه که زاویه بازشدگی مخروط از طریق مطابقت دادن ضرایب سختی استاتیکی محاسبه می‌شود، یک تقریب مجانب دویل برای مخروط به دست می‌آید که برای هر دو مقدار فرکانس صفر (حالت استاتیک) و حد فرکانس بالا که با میراگر تابشی C کنترل می‌شود، صحیح است.

سایر درجات آزادی به طور مشابه مدل‌سازی می‌شوند. مخروط‌های انتقالی و دورانی نیز وجود دارد. برای هر درجه آزادی، دیسک واقع بر روی نیم‌فضا به عنوان یک مخروط ناقص نیمه نامحدود با نسبت ظاهری z_0 / r_0 خود ایده‌آل‌سازی می‌شود (شکل ۲ - ۳). مطابقت دادن ضریب سختی استاتیکی مخروط با مقدار دقیق متناظر آن برای دیسک واقع بر روی نیم‌فضا، مقدار z_0 / r_0 و بنابراین زاویه بازشدگی را تعیین می‌نماید. اعمال یک بار یا



شکل ۲ - ۳ مخروطها برای درجات آزادی مختلف با نسبت رأس (زاویه بازشدگی)، سرعت انتشار موج و اعوجاج متناظر.

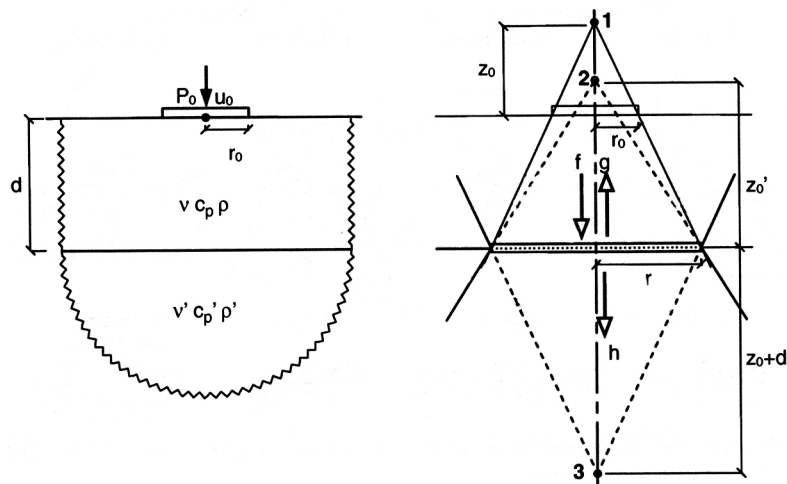
لنگر به دیسک نگهداری شده بر روی سطح آزاد به ایجاد تنش‌هایی در نیم‌فضا منجر شده که بر روی سطحی اعمال می‌گردد که با ازدیاد عمق افزایش یافته و به صورت تقریبی توسط مخروط نمایش داده می‌شود. مخروط به صورت یک میله یا تیر با الگوی تغییرمکان بر روی سطح مقطع در نظر گرفته می‌شود که با استفاده از مقدار متناظر بر روی محور مخروط تعیین می‌گردد. بنابراین، تئوری مقاومت مصالح (مقاطع صفحه به صورت صفحه باقی می‌ماند) به کار برده می‌شود. از محیط پیوسته نیم‌فضا در خارج از مخروط صرف‌نظر می‌شود. بسته به طبیعت تغییرشکل، لازم است بین مخروط انتقالی برای حرکت قائم و افقی و مخروط دورانی برای حرکت چرخشی و پیچشی، تمایز قایل شد. همان‌گونه که در شکل ۲ - ۳ نشان داده شده، سرعت‌های مناسب انتشار موج عبارتند از c_s برای حالت‌های افقی و پیچشی که در برش تغییرشکل می‌یابد، و c_p برای حالت‌های قائم و دورانی که به صورت محوری تغییر شکل می‌یابد. نسبت پواسون ν و چگالی جرم ρ همان مقادیر مربوط به نیم‌فضا هستند.

معادلات حاکم بر انتشار موج در این حالت‌های ناقص نیمه نامحدود همگن، برای تحریک هارمونیک در تمام درجات آزادی، در فصل ۳ استخراج شده است.

۲-۳ انعکاس و انکسار موج در ناپیوستگی مصالح در مخروط

در این بخش ساز و کار موج تولید شده در محل ناپیوستگی مصالح در مخروط که با سطح مشترک بین دو لایه متناظر است، به صورت کیفی مورد بحث قرار می‌گیرد. این بخش دومین بلوک سازنده روش محاسباتی را معرفی می‌نماید. به عنوان مثال، درجه آزادی قائم دیسک واقع بر روی سطح یک لایه به عمق d با نسبت پواسون ν ، سرعت موج انبساطی c_p و چگالی جرم ρ که بر روی یک نیم‌فضا با ویژگی‌های مصالح، ν' ، c_p' ، ρ' قرار گرفته، بررسی می‌شود (شکل ۲-۴ الف).

در صورتی که نیم‌فضا همگن نبوده اما چندلایه باشد، انتشار موج مجاور دیسک بارگذاری شده (که منبع آشفتگی است) در ابتدا تحت تاثیر قرار نمی‌گیرد. هنگامی که انتشار موج آغاز می‌شود، موج هیچ دانشی ندارد که پس از فاصله d با یک ناپیوستگی در مشخصات مصالح مواجه خواهد شد. بنابراین، موج در یک قطعه مخروطی که مخروط اولیه نامیده می‌شود، با دور شدن از دیسک به سمت پایین انتشار می‌یابد. ویژگی‌های این مخروط که رأس آن با عنوان ۱ مشخص شده (شکل ۲-۴ ب)، همان مشخصات یک نیم‌فضای همگن با مشخصات مصالح لایه می‌باشد. سرعت موج برابر با c_p بوده و نسبت



شکل ۲-۴ دیسک بر روی لایه واقع بر روی نیم‌فضا. الف) هندسه با نام‌گذاری؛ ب) امواج حاصل با انتشار به سمت بیرون در مخروط در محل ناپیوستگی مصالح.

ظاهری رابطه ۲ - ۱۶ از نسبت پواسون لایه تبعیت می‌کند. هنگام رویارویی با یک ناپیوستگی در مشخصات مصالح که با یک سطح مشترک لایه‌ای متناظر است، یک منبع آشفستگی به وجود می‌آید که می‌تواند به عنوان یک دیسک فرضی متصور شود. موج برخورد f در مخروط اولیه موجب ایجاد یک موج/انکسار یافته h با انتشار رو به پایین و یک موج/انعکاس یافته g با انتشار رو به بالا شده که هر دو به سمت بیرون از منبع آشفستگی در مخروط‌های خود منتشر می‌شوند. فرمول‌بندی سازگاری تغییر مکان و تعادل در سطح مشترک، تعیین امواج انعکاس یافته و انکسار یافته را برای موج برخورد معین ممکن می‌سازد، که این امواج به نوبه خود می‌توانند به عنوان دو موج برخورد جدید با انتشار در مخروط‌های اولیه خود در نظر گرفته شوند. استخراج تفصیلی که در حوزه فرکانس انجام شده، در فصل ۴ ارائه شده است. (این استخراج آشکار می‌سازد که آنچه که ضریب انعکاس خوانده می‌شود وابسته به فرکانس است.) این روش، مشابه روش مورد بحث برای میله منشوری در انتهای پیوست پ است (شکل پ - ۱ - د، رابطه پ - ۲۴ با رابطه پ - ۲۵). شعاع دیسک فرضی در سطح مشترک برابر است با $r_0 = (z_0 + d) / z_0$ (شکل ۲ - ۴ - ب). موج انکسار یافته h با سرعت موج c_p و نسبت ظاهری z'_0 / r که از طریق رابطه ۲ - ۱۶ با نسبت پواسون v' تعیین می‌شود، در مخروط خود منتشر می‌گردد که رأس آن با عنوان ۲ در شکل ۲ - ۴ - ب مشخص شده است. موج انعکاس یافته f با سرعت موج c_p در مخروط خود منتشر می‌شود که رأس آن با عنوان ۳ در شکل ۲ - ۴ - ب مشخص شده است. نسبت ظاهری $(z_0 + d) / r$ همان نسبت مخروط اول با رأس ۱ برابر z_0 / r_0 است، زیرا هر دو نسبت ظاهری، انتشار موج در مصالح یکسان را مدل می‌کنند.

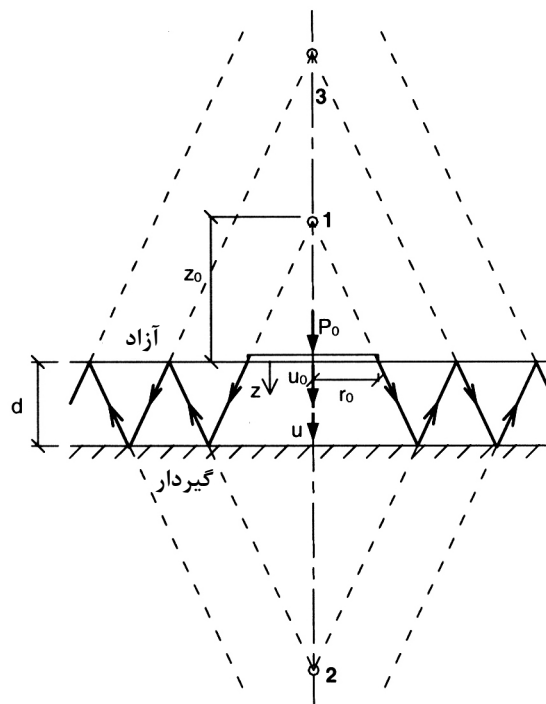
فلش‌های شکل ۲ - ۴ - ب جهت‌های انتشار موج برخورد f ، موج انعکاس یافته g و موج انکسار یافته h را نشان می‌دهند. مساحت مخروط در جهت انتشار موج که توزیع آشفستگی را در یک محیط پیوسته مدل نموده، افزایش می‌یابد. به این ترتیب، مخروط‌ها (قطعات مخروطی) در حال 'تابش' هستند.

یک سطح آزاد و یک مرز گیردار در نیم‌فضا، حالت‌های خاص ناپیوستگی مصالح‌اند که در ادامه بحث خواهند شد.

در یک نیم‌فضای چندلایه تعداد زیادی انعکاس و انکسار ایجاد می‌شود. در اصل، هر

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۲۹

موج‌های انعکاس یافته و انکسار یافته (با انتشار در مخروط خود به سمت بیرون و خارج از سطح مشترک) به عنوان موج برخورد اضافی عمل می‌نمایند که امواج انعکاس یافته و انکسار یافته خود را در مواجهه با ناپیوستگی دیگر در مشخصات مصالح به وجود می‌آورند. دنبال نمودن متوالی انعکاس و انکسار هر موج برخورد و برهم نهی بارها به الگوی موج حاصله می‌انجامد. به منظور نمایش، الگوی موج به عنوان یک تابع زمان در یک لایه گیردار در تکیه‌گاه به عمق d تعیین می‌شود. این موج از اعمال یک بار $P_0(t)$ متغیر با زمان به یک دیسک سطحی به شعاع r_0 حاصل شده است (شکل ۲ - ۵). نیروی $P_0(t)$ امواج انبساطی را به وجود می‌آورد که از زیر دیسک سرچشمه گرفته و به طور قائم با سرعت c (برابر c_p ، که اندیس p برای اختصار حذف شده)، منتشر می‌شود. این امواج انبساطی با انعکاس به جلو و عقب بین مرز گیردار و سطح آزاد، با توزیع و کاهش دامنه منتشر می‌شوند.

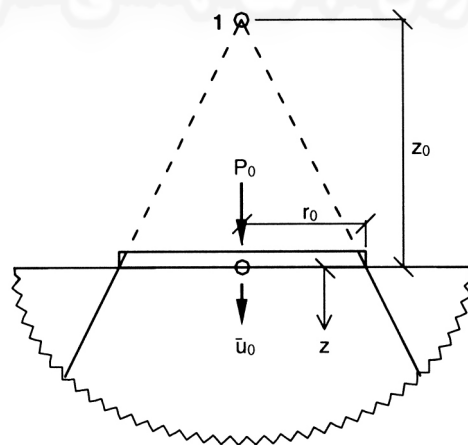


شکل ۲ - ۵ دیسک بارگذاری شده در جهت قائم واقع بر روی سطح لایه گیردار در تکیه‌گاه با الگوی موج ایجاد شده به وسیله انعکاس‌ها.

۳۰ تحلیل ارتعاشات پی

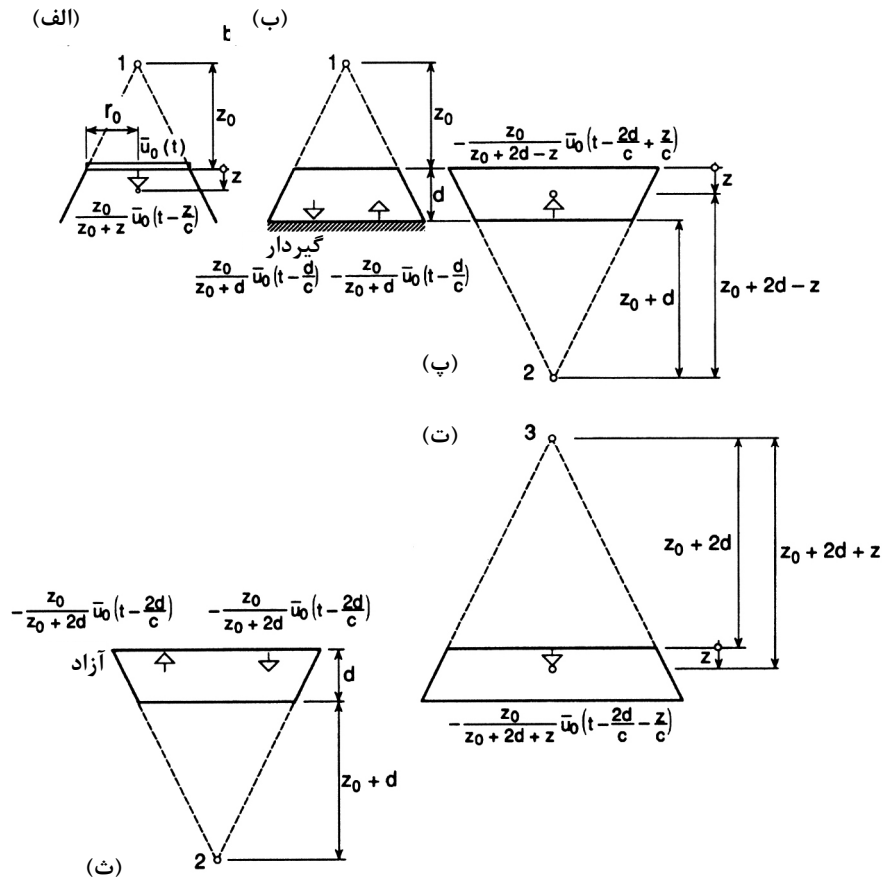
نام گذاری زیر برای تغییر مکان ها معرفی می شود. تغییر مکان مخروط با یک خط تیره در بالا به صورت $\bar{u}(z, t)$ نشان داده می شود که یک دیسک را با بار $P_0(t)$ بر روی یک نیم فضای همگن با مشخصات مصالح لایه (شکل ۲ - ۶) مدل نموده و مقدار آن در زیر دیسک برابر با $\bar{u}_0(t)$ است. برای دیسک بار گذاری شده با نیروی یکسان $P_0(t)$ بر روی لایه، تغییر مکان های محاسبه شده از طریق بر هم نهی سهم مشارکت تمام مخروط های درگیر برابر با $u(z, t)$ و $u_0(t)$ است. به این ترتیب آشکار می شود که حرکت سطحی $\bar{u}_0(t)$ مخروط نمایانگر نیم فضای همگن را می توان برای تولید حرکت $u(z, t)$ لایه با مقدار سطحی آن برابر $u_0(t)$ به کار برد. از این رو، $\bar{u}_0(t)$ را می توان تابع مولد نیز نامید.

الگوی موج در لایه که از برهم نهی مخروط های مختلف تشکیل شده (شکل ۲ - ۵)، در اینجا به تفصیل مورد بحث قرار می گیرد (شکل ۲ - ۷). نیروی $P_0(t)$ ، امواج انبساطی را تولید نموده که در طول یک مخروط با رأس ۱ و ارتفاع z_0 از دیسک به سمت پایین منتشر می شوند. در صورتی که خاک به صورت یک لایه یا یک نیم فضا باشد، این بخش اولیه الگوی موج که موج برخورد نامیده شده و مخروطی که موج در طول آن انتشار می یابد یکسان هستند، زیرا همان طور که پیشتر بیان شد، موج ایجاد شده در زیر دیسک اطلاعی ندارد که آیا در یک عمق مشخص با یک سطح مشترک گیردار مواجه خواهد شد یا نه. بنابراین z_0



شکل ۲ - ۶ دیسک بار گذاری شده در جهت قائم واقع بر روی سطح نیم فضای همگن با مشخصات مصالح لایه به وجود آورنده موج برخورد در مخروط اولیه.

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۳۱



شکل ۲ - ۷ الگوی موج و مخروط‌های متناظر. الف) ایجاد موج در مخروط نیم‌فضا؛ ب) امواج برخورد و انعکاس‌یافته در تکیه‌گاه گیردار؛ پ) موج بالارونده در لایه در نتیجه انعکاس در تکیه‌گاه گیردار؛ ت) امواج برخورد و انعکاس‌یافته در سطح آزاد؛ ث) موج پایین‌رونده در لایه در نتیجه انعکاس در سطح آزاد.

همان ارتفاع رأس مخروط نیم‌فضای همگن را نیز نشان می‌دهد (شکل ۲ - ۶) که در رابطه ۲ - ۱۶ تعیین شده است. رابطه نیروی اندرکنش - تغییرمکان دیسک واقع بر روی نیم‌فضای همگن مطابق رابطه ۲ - ۲۴ نیز صادق است که با جایگزین نمودن $u_0(t)$ با $\bar{u}_0(t)$ خواهیم داشت:

$$C\dot{\bar{u}}_0(t) + K\bar{u}_0(t) = P_0(t) \quad (۲ - ۲۶)$$

که در آن K و C در رابطه ۲ - ۲۵ تعیین شده‌اند. به منظور تعیین $\bar{u}_0(t)$ برای یک نوسان

۳۲ تحلیل ارتعاشات پی

عمومی $P_0(t)$ ، یک روش انتگرال گیری عددی را می توان مورد استفاده قرار داد، یا پاسخ تحلیلی برای این معادله دیفرانسیل معمولی درجه اول با ضرایب ثابت به صورت زیر به کار برده می شود:

$$\bar{u}_0(t) = \frac{1}{C} \int_0^t e^{-\frac{K}{c}(t-\tau)} P_0(\tau) d\tau \quad (27-2)$$

تابع $\bar{u}_0(t)$ برای یک متغیر منفی، یعنی برای $t < 0$ برابر صفر است.

در رابطه ۲ - ۱۸ نشان داده شده که تغییر مکان که تابعی از $t - z/c$ برای انتشار در جهت مثبت z است، با عکس فاصله از رأس در مخروط $(z_0 + z)$ متناسب می باشد. توجه شود که مبدأ مختصات z که نشانگر عمق است، بر روی سطح لایه در نظر گرفته می شود (شکل ۲ - ۵)، در حالی که مبدأ در رابطه ۲ - ۱۸ و شکل ۲ - ۲ در رأس در نظر گرفته شده است. به این ترتیب مطابق شکل ۲ - ۷ الف، این الگوی موج برخورد با انتشار در طول مخروط با رأس ۱، به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$\bar{u}(z, t) = \frac{z_0}{z_0 + z} \bar{u}_0\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (28-2)$$

در مرز گیردار، تغییر مکان موج برخورد با جایگزین نمودن $z = d$ در رابطه ۲ - ۲۸ (شکل ۲ - ۷ الف) به صورت زیر استخراج می شود:

$$\bar{u}(d, t) = \frac{z_0}{z_0 + d} \bar{u}_0\left(t - \frac{d}{c}\right) \quad (29-2)$$

از آنجا که تغییر مکان کلی در مرز گیردار به صفر می رسد، موج انعکاس یافته باید همان تغییر مکان مشابه رابطه ۲ - ۲۹ را اما با علامت مخالف دارا باشد. این موج انعکاس یافته در طول مخروط خود با رأس ۲ به مت بالا منتشر خواهد شد (شکل ۲ - ۷ ب). از آنجا که زاویه باز شدگی مخروط تنها به نسبت پواسون خاک وابسته است (رابطه ۲ - ۱۶)، زاویه باز شدگی مخروط با رأس ۲ (و برای تمام مخروطها که به ترتیب ایجاد می شوند) همان مقدار زاویه مخروط اصلی با رأس ۱ خواهد بود. بنابراین، ارتفاع مخروط با رأس ۲ برابر $0 + d$ است. فاصله از رأس ۲ تا نقطه ای در عمق z برابر $z_0 + 2d - z$ است؛ تغییر مکان نیز با عکس این فاصله متناسب خواهد بود. برای این موج بالارونده با انتشار در جهت منفی z ، تغییر مکان تابعی از $t + z/c$ خواهد بود (مطابق رابطه ۲ - ۱۷ ب). همچنین یک عدد ثابت در متغیر

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۳۳

تغییر مکان به وجود خواهد آمد که با معادل قرار دادن متغیر در مرز گیردار با $t - d/c$ تعیین می‌گردد (رابطه ۲ - ۲۹). تغییر مکان موج بالارونده برابر است با:

$$-\frac{z_0}{z_0 + 2d - z} \bar{u}_0 \left(t - \frac{2d}{c} + \frac{z}{c} \right) \quad (۳۰ - ۲)$$

در سطح آزاد لایه، تغییر مکان موج بالارونده با جایگزین نمودن $z = 0$ در رابطه ۲ - ۳۰ (شکل ۲ - ۷ - ت) استخراج می‌شود.

$$-\frac{z_0}{z_0 + 2d} \bar{u}_0 \left(t - \frac{2d}{c} \right) \quad (۳۱ - ۲)$$

مشابه حالت مرز آزاد یک میله منشوری (انتهای پیوست پ را ببینید)، موج انعکاس یافته در مخروط همان تغییر مکان مطابق رابطه ۲ - ۳۱ را نشان خواهد داد. اثبات در ادامه ارائه می‌شود (رابطه ۲ - ۳۳).

این موج انعکاس یافته در طول مخروط خود با رأس ۳ (شکل ۲ - ۷ - ث) به سمت پایین منتشر می‌گردد. تغییر مکان موج پایین‌رونده، با رابطه هندسی نشان داده شده به این شکل و اعمال سازگاری دامنه و همچنین سازگاری متغیر تغییر مکان موج انعکاس یافته در سطح آزاد، به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$-\frac{z_0}{z_0 + 2d + z} \bar{u}_0 \left(t - \frac{2d}{c} - \frac{z}{c} \right) \quad (۳۲ - ۲)$$

تغییر مکان متناظر با مجموع روابط ۲ - ۳۰ و ۲ - ۳۲ باید شرط مرزی نیروی صفر در سطح آزاد و از این رو، کرنش محوری صفر برای $z = 0$ را ارضا نماید. شرط مرزی کرنش محوری صفر برابر با مشتق جزئی تغییر مکان نسبت به z است. مشتق رابطه ۲ - ۳۰ در $z = 0$ برابر است با:

$$-\frac{z_0}{(z_0 + 2d)^2} \bar{u}_0 \left(t - \frac{2d}{c} \right) - \frac{z_0}{z_0 + 2d} \frac{1}{c} \bar{u}'_0 \left(t - \frac{2d}{c} \right) \quad (۳۳ - ۲)$$

که در آن، \bar{u}'_0 دفرانسیل‌گیری نسبت به متغیر کلی تابع مولد را نشان می‌دهد: $(\) = t - 2d/c + z/c$ با $\bar{u}'_0 = \partial \bar{u}'_0 / \partial (\)$. مشتق رابطه ۲ - ۳۲، برابر با همان مقدار مشتق رابطه ۲ - ۳۰ اما با علامت مخالف است. به این ترتیب مجموع برابر صفر خواهد بود.

این روش تولید امواج ادامه خواهد یافت. موج پایین‌رونده توصیف شده در رابطه

۲ - ۳۲ در مرز گیردار منعکس خواهد شد (شکل ۲ - ۵). موج بالارونده جدید به وجود

۳۴ تحلیل ارتعاشات پی

آمده با انتشار در طول مخروط خود، در سطح آزاد انعکاس خواهد یافت که یک موج پایین رونده جدید را به وجود می‌آورد. در هر مرز گیردار و آزاد، ارتفاع رأس مخروط که موج انعکاس یافته در طول آن منتشر می‌شود، افزایش می‌یابد. به این ترتیب، دامنه و گسترش امواج در لایه کاهش می‌یابد که موجب تشعشع انرژی در جهت افقی می‌گردد.

تغییر مکان حاصل در لایه $(u(z, t))$ برابر با جمع سهم‌های مشارکت تمام مخروطها است؛ تغییر مکان‌های موج برخورد (رابطه ۲ - ۲۸ و ۲ - ۷ - الف)، تغییر مکان‌های موج بالارونده (رابطه ۲ - ۳۰، شکل ۲ - ۷ - پ)، تغییر مکان‌های موج پایین رونده (رابطه ۲ - ۲۳، شکل ۲ - ۷ - ث) و تغییر مکان‌های تمام امواج بالارونده و پایین رونده متوالی جمع می‌شوند. به طور کلی، تغییر مکان لایه در عمق z و در زمان t $(u(z, t))$ را می‌توان به صورت الگوی موج زیر بیان نمود:

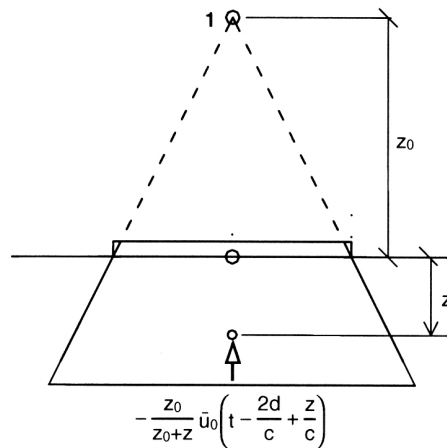
$$u(z, t) = \frac{z_0}{z_0 + z} \bar{u}_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left[\frac{z_0 \bar{u}_0 \left(t - \frac{2jd}{c} + \frac{z}{c} \right)}{z_0 + 2jd - z} + \frac{z_0 \bar{u}_0 \left(t - \frac{2jd}{c} - \frac{z}{c} \right)}{z_0 + 2jd + z} \right]$$

(۲ - ۳۴)

از آنجا که مقدار $\bar{u}_0(t)$ برای یک متغیر منفی برابر با صفر است، مجموع نشان داده شده در رابطه ۲ - ۳۴ که به بی‌نهایت بسط داده می‌شود، محدود می‌باشد.

توجه کنید که برای تمام امواج، انتشار در جهت قائم در مخروط‌های تابشی (قطعات مخروطی) به وجود می‌آید، یعنی همواره مساحت مخروطها در جهت انتشار موج افزایش می‌یابد. لایه رانمی‌توان با قطعه مخروطی غیرتابشی معمولی (یک المان محدود یک میله با کاهش تدریجی) ایده‌آل‌سازی نمود. در یک قطعه مخروطی معمولی امواج انعکاس یافته در مرز گیردار در گرده‌ای باریک شونده متمرکز می‌شوند. شکل ۲ - ۸ را باید با شکل ۲ - ۷ - پ مقایسه نمود. موج بالارونده انعکاس یافته نمی‌تواند انرژی را به صورت افقی گسترش داده و تابش دهد. این به این معنی است که برای تحلیل یک محیط پیوسته دارای مرز، در صورت استفاده از یک قطعه مخروطی معمولی، هیچ میرایی تابشی ایجاد نمی‌شود.

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۳۵

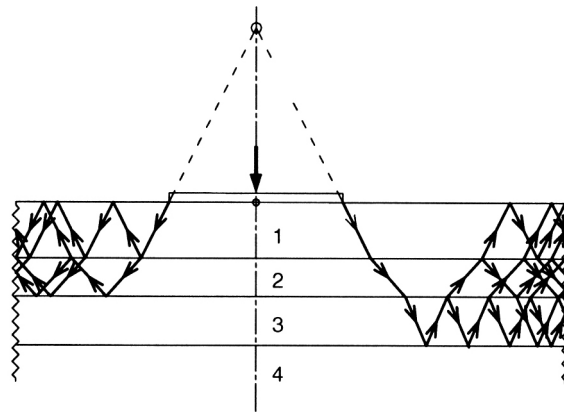


شکل ۲ - ۸ موج بالارونده در لایه در نتیجه انعکاس در تکیه‌گاه گیردار با انتشار در مخروط معمولی به جای مخروط تابشی.

۲ - ۴ دیسک واقع بر روی سطح نیم‌فضای چندلایه

بر مبنای بلوک‌های سازنده که در بخش‌های ۲ - ۲ و ۲ - ۳ تشریح شد، انتشار موج ایجاد شده به وسیله یک دیسک بارگذاری شده واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای چندلایه را می‌توان توصیف نمود. (حرکت قائم در شکل ۲ - ۹ نمایش داده شده است). حرکت و انتشار جزء به صورت قائم و به سمت پایین و بالا بر روی محورهای قطعات مخروطی ایجاد می‌شود که مساحت سطح مقطع آنها در جهت انتشار موج افزایش می‌یابد.

موج اولیه در یک مخروط اولیه با نسبت ظاهری که به وسیله نسبت پواسون لایه ۱ تعیین شده، به سمت پایین منتشر می‌شود. هنگامی که موج برخورد با سطح مشترک بین لایه‌های ۱ و ۲ مواجه می‌شود، یک موج انعکاس یافته با انتشار رو به بالا در لایه ۱ و یک موج انکسار یافته با انتشار رو به پایین در لایه ۲ ایجاد می‌شود که هر کدام در قطعه مخروطی خود انتشار می‌یابد. این امواج به صورت امواج برخورد در مخروط‌های اولیه جدید عمل نموده که هنگام پیوند یافتن بر یک سطح مشترک، هر کدام موجب ایجاد امواج اضافی انعکاس یافته و انکسار یافته می‌گردد. این ساز و کار تکرار می‌شود. برای مثال، موج انکسار یافته با انتشار در لایه ۲، یک موج انعکاس یافته در لایه ۲ (سمت چپ شکل ۲ - ۹) و



شکل ۲ - ۹ انتشار امواج پایین‌رونده و بالارونده در قطعات مخروطی برای دیسک سطحی واقع بر روی نیم‌فضای چندلایه.

یک موج انکساریافته در لایه ۳ (سمت راست شکل ۲ - ۹) را به وجود می‌آورد. زوایای بازشدگی تمام قطعات مخروطی متناظر با یک لایه، برای انتشار موج در هر دو جهت برابر است. در سمت چپ شکل ۲ - ۹، الگوی موج در دو لایه اول به صورت ساده و بدون تأثیر امواج بالارونده از لایه ۳ و لایه‌های بعدی زیرین ترسیم شده است. در سمت راست همان شکل، الگوی موج ایجاد شده به وسیله موج اول در لایه ۳، در سه لایه اول نمایش داده شده که در آن امواج بالارونده از لایه ۴ و لایه‌های بعدی زیرین مورد بررسی قرار نگرفته است. دنبال نمودن متوالی انعکاس‌ها و انکسارهای هر موج برخورد و برهم نهی آنها به الگوی موج حاصل تا یک مرحله معین می‌انجامد.

در اصل، روش محاسبه کمی تغییرمکان‌ها در نیم‌فضای چندلایه مشابه روش بیان شده در بررسی مثال شکل ۲ - ۷ است. تابع مولد $\bar{u}_0(t)$ از رابطه نیروی اندرکنش - تغییرمکان اولین مخروط اولیه (روابط ۲ - ۲۶ و ۲ - ۲۷) پیروی می‌کند. انتشار موج به سمت بیرون مطابق رابطه ۲ - ۲۸ به موج برخورد f در سطح مشترک می‌انجامد (رابطه ۲ - ۲۹). فرمول‌بندی سازگاری تغییرمکان و تعادل موجب ایجاد موج انعکاس یافته g و موج انکساریافته h (شکل ۲ - ۴ - ب) شده که امواج برخورد جدید با انتشار به سمت بیرون هستند. استخراج تفصیلی که برای تحریک هارمونیک انجام می‌شود، در فصل‌های ۳ و ۴ ارائه شده است.

۲-۵ دیسک مدفون در نیم‌فضای چندلایه

در روش محاسباتی به منظور تحلیل یک پی مدفون که در بخش ۲ - ۶ تشریح شده، علاوه بر الگوی موج تغییر مکان‌های ایجاد شده در اثر یک دیسک سطحی بارگذاری شده، الگوی موج ناشی از یک دیسک بارگذاری شده مدفون در نیم‌فضای چندلایه نیز مورد نیاز می‌باشد. در اینجا درجه آزادی قائم مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور تعیین الگوی موج در یک نیم‌فضای چندلایه مربوط به یک دیسک سطحی (شکل ۲ - ۹)، نقطه شروع، مخروط ناقص نیمه نامحدودی است که یک پی سطحی واقع بر روی یک نیم‌فضای همگن با مشخصات مصالح لایه اول مجاور دیسک را مدل‌سازی می‌کند (شکل ۲ - ۱۰ - الف). نسبت ظاهری z_0 / r_0 مشخص‌کننده زاویه بازشدگی مخروط، از رابطه ۲ - ۱۶ تعیین شده و تغییر مکان مطابق رابطه ۲ - ۱۸ با استفاده از رابطه ۲ - ۲۴ مشخص می‌گردد. به‌طور مشابه، به منظور بررسی الگوی موج در نیم‌فضای چندلایه متناظر با دیسک مدفون در یک لایه مشخص، دیسک مدفون در فضای کامل همگن با مشخصات مصالح این لایه بررسی می‌شود. این وضعیت را می‌توان با یک مدل مخروط دوپل (مطابق شکل ۲ - ۱۰ - ب) تقریب زد که دارای همان نسبت‌های مشابه مدل مخروطی یک‌طرفه شکل ۲ - ۱۰ - الف است. نیمی از بار اعمال شده در کشش (مخروط بالایی) و نیمی در فشار (مخروط پایینی) تحمل می‌گردد، در حالی که امواج از دیسک به سمت بیرون منتشر می‌شوند. به بیان دیگر، سختی مخروط دوپل در مقایسه با سختی مخروط یک‌طرفه دو برابر شده است. بنابراین، رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان مخروط دوپل به صورت زیر می‌باشد: (رابطه ۲ - ۲۴ را ببینید).

$$P_0(t) = 2(K u_0(t) + C \dot{u}_0(t)) \quad (۲ - ۳۵)$$

که در آن K و C در رابطه ۲ - ۲۵ مشخص شده است.

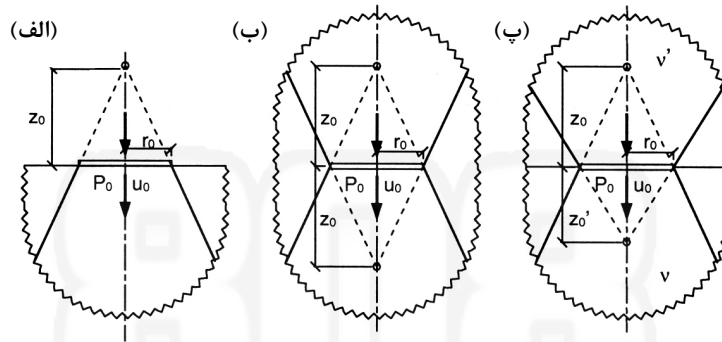
برای یک دیسک مدفون، الگوی موج در یک نیم‌فضای چندلایه به صورت الگوی موج برای یک دیسک سطحی تشکیل می‌شود با این تفاوت که دو مخروط اولیه با امواج برخورد وجود دارد. به عنوان مثال، دیسک مدفون در یک لایه با نسبت پواسون ν واقع بر روی یک لایه با نسبت پواسون ν' و واقع بر رویه لایه دیگری با نسبت پواسون ν'' مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۲ - ۱۱). جهت‌های انتشار موج توسط فلش‌هایی در مخروط‌ها با زوایای بازشدگی α ، α' و α'' نشان داده می‌شوند که به ترتیب با ν ، ν' و ν'' تعیین می‌گردند (رابطه ۲ - ۱۶).

۳۸ تحلیل ارتعاشات پی

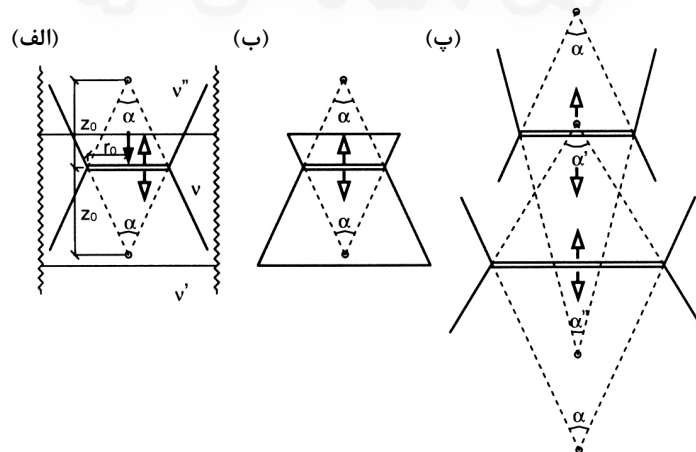
هنگامی که دیسک مدفون، منطبق بر سطح مشترک دو لایه باشد (شکل ۲ - ۱۰ - پ)، مفهوم مخروط دوپل به کار برده می‌شود که هر مخروط منفرد از طریق مشخصات نیم‌فضای متناظر تعیین می‌شود. رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان برابر است با:

$$P_0(t) = (K + K') u_0(t) + (C + C') \dot{u}_0(t) \quad (۳۶ - ۲)$$

که در آن، K' و C' در رابطه ۲ - ۲۵ تعیین می‌گردند، اما استفاده از مشخصات نیم‌فضای بالاتر توسط یک پریم (') نشان داده شده است.



شکل ۲ - ۱۰ دیسک با مدل مخروط متناظر. الف) دیسک بر روی سطح نیم‌فضا با مدل مخروط یک‌طرفه؛ ب) دیسک مدفون در فضای کامل همگن با مدل مخروط دوپل؛ پ) دیسک مدفون در سطح مشترک دو نیم‌فضای همگن تشکیل‌دهنده یک فضای کامل با مدل مخروط دوپل.



شکل ۲ - ۱۱ انتشار موج در مخروط دوپل مدفون در نیم‌فضای چندلایه. الف) مخروط‌های اولیه ناقص نیمه‌نامحدود؛ ب) امواج برخورد در قطعات مخروطی اولیه؛ پ) امواج انعکاس‌یافته و انکسار یافته در ناپیوستگی‌های مصالح با انتشار به سمت بیرون در قطعات مخروطی خود.

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۳۹

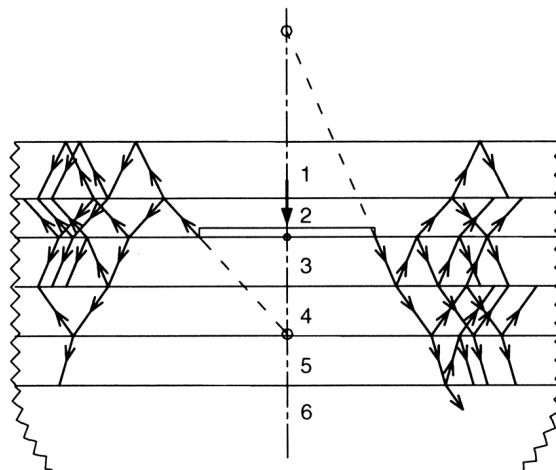
برای یک ساختگاه چندلایه، الگوی موج برای یک دیسک مدفون در شکل ۲ - ۱۲ ارائه شده است. در سمت چپ، انتشار امواج رو به بالا و رو به پایین در پنج قطعه مخروطی اول که توسط مخروط اولیه در لایه ۲ به وجود آمده، نشان داده شده است. در سمت راست، انتشار امواج رو به بالا و رو به پایین در پنج قطعه مخروطی اول به وجود آمده از مخروط اولیه در لایه ۳، نمایش داده شده است.

به جای تعیین نسبت ظاهری با استفاده از ضریب سختی استاتیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضا، مطابق رابطه ۲ - ۱۶، ضریب سختی استاتیکی دقیق دیسک مدفون در فضای کامل همگن به صورت فرم بسته آن قابل استفاده است. برای درجه آزادی قائم، ضریب سختی استاتیکی دقیق دیسک مدفون در فضای کامل همگن برابر است با:

$$K_{exact} = \frac{32(1-\nu)}{3-4\nu} G r_0 \quad (۳۷ - ۲)$$

از مطابقت دادن رابطه ۲ - ۳۷ با ضریب سختی استاتیکی مخروطی دوبل (رابطه ۲ - ۱۴) خواهیم داشت:

$$K = 2 \frac{E_c \pi r_0^2}{z_0} \quad (۳۸ - ۲)$$



شکل ۲ - ۱۲ انتشار امواج پایین‌رونده و بالا‌رونده در قطعات مخروطی برای دیسک مدفون در نیم‌فضای چندلایه.

۴۰ تحلیل ارتعاشات پی

و با استفاده از روابط ۲-۲ الف و ۲-۲ پ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{8} \frac{3 - 4\nu}{1 - 2\nu} \quad (۲ - ۳۹)$$

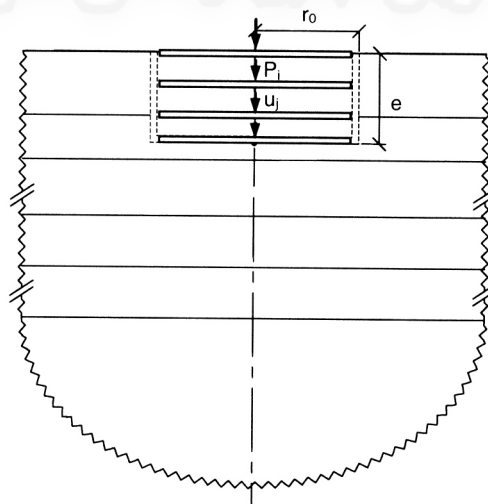
این کالیبراسیون بر مبنای یک دیسک واقع در یک فضای کامل به نسبت‌های ظاهری می‌انجامد که تا حدودی کوچکتر از نسبت‌های ظاهری بر مبنای دو دیسک واقع بر روی یک نیم‌فضا هستند (برای $\nu = 1/4$: $\nu = 1/57$ در مقایسه با $1/767$ ؛ برای $\nu = 1/3$: $\nu = 1/963$ در مقایسه با $2/094$).

برای پی‌های نیمه‌مدفون در نیم‌فضا که یک سطح آزاد وجود دارد، کالیبراسیون برحسب مقادیر نیم‌فضا ترجیح داده می‌شود. این حالت برای پی‌های کاملاً مدفون به ویژه در عمق زیاد صدق نمی‌کند.

۲-۶ پی مدفون در نیم‌فضای چندلایه

در این بخش، مفهوم روش محاسباتی برای محاسبه سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی برای پی استوانه‌ای صلب شرح داده می‌شود.

درجه آزادی قائم برای نمایش به کار برده می‌شود. شکل ۲-۱۳ یک منطقه



شکل ۲-۱۳ مجموعه دیسک‌ها با نیروهای اضافی برای مدل‌سازی پی مدفون.

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۴۱

استوانه‌ای خاک را با شعاع r_0 به عمق e در نیم‌فضای چندلایه نشان می‌دهد. این منطقه خاک که بعداً گودبرداری خواهد شد، به صورت یک بلوک ساندویچی متشکل از دیسک‌های صلب نمایش داده شده که به وسیله لایه‌های خاک جدا می‌گردند. دیسک‌ها منطبق بر سطوح مشترک نیم‌فضا خواهند بود. افزون بر آن، دیسک‌های بیشتری به منظور نمایش مناسب رفتار دینامیکی انتخاب می‌شوند. حداقل ده گره (دیسک) در هر واحد طول موج توصیه می‌شود. نیروهای قائم (P_i) بر روی دیسک‌های واقع بر سطح یا مدفون در نیم‌فضای چندلایه اعمال شده که می‌توانند به صورت نیروهای اضافی در نظر گرفته شوند. سیستم اولیه که نامعین است، تغییرمکان‌های قائم (u_i) مربوط به دیسک‌های سطحی و مدفون در نیم‌فضای چندلایه بدون گودبرداری، یا همان میدان آزاد را مورد بررسی قرار می‌دهد. مشابه روش نیرو در تحلیل سازه، رابطه بین تغییرمکان‌های دیسک‌ها و نیروهای وارد بر دیسک‌ها برقرار می‌شود. این رابطه بر مبنای انتشار موج در قطعات مخروطی با در نظر گرفتن لایه‌بندی است. همان‌طور که برای دیسک سطحی و دیسک مدفون در بخش‌های ۲ - ۴ و ۲ - ۵ تشریح شده است. از معکوس کردن رابطه انعطاف‌پذیری دینامیکی، ماتریس سختی دینامیکی برای دیسک‌های روی سطح و مدفون در نیم‌فضای چندلایه (میدان آزاد) به دست می‌آید که نیروهای اضافی را به صورت تابعی از تغییرمکان‌ها بیان می‌کند. از آنجا که دیواره‌های پی صلب‌اند، به منظور اعمال حرکت جسم صلب، دیسک‌ها و خاک محبوس بین آنها مقید می‌شوند. حرکت جسم صلب برای درجه آزادی قائم با معادل قرار دادن تغییرمکان‌های قائم تمام دیسک‌ها انجام می‌شود. از این معادل‌سازی، نیروی وارد بر پی صلب نیز به دست می‌آید که با مجموع تمام نیروهای قائم اعمال شده بر روی دیسک‌ها برابر است. چنانچه حاصل ضرب جرم خاک در شتاب استوانه خاک داخلی صلب از نیرو کسر شود، خاک محبوس به صورت تحلیلی گودبرداری می‌شود. با استفاده از این روش، سختی دینامیکی پی صلب مدفون در نیم‌فضای چندلایه به دست می‌آید.

به منظور محاسبه حرکت ورودی مؤثر پی، حرکت میدان آزاد تعیین می‌گردد (شکل ۱ - ۲ - ب، پیوست ب - ۲). با استفاده از سختی دینامیکی دیسک‌ها در میدان آزاد و قید جسم صلب که هر دو در بالا بیان شده، حرکت ورودی مؤثر پی از این شرط تبعیت می‌کند که نیروی برآیند وارد بر پی صلب برابر صفر است (پیوست ب - ۱).

تحلیل به طور کلی برای تحریک هارمونیک انجام می‌شود که به تفصیل در فصل ۵

شرح داده شده است. رابطه کلیدی، از انعطاف‌پذیری دینامیکی میدان آزاد یا همان نیم‌فضای چندلایه قبل از گودبرداری، نسبت به دیسک‌ها تشکیل می‌شود. این رابطه با استفاده از انتشار موج در قطعات مخروطی برقرار می‌شود که دارای دو بلوک تشکیل‌دهنده هستند؛ بلوک اول، مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون (فصل ۳) و بلوک دوم، انعکاس و انکسار موج در محل ناپیوستگی مصالح در مخروط (فصل ۴) می‌باشد.

۲-۷ ویژگی‌های مدل مخروطی

مدل‌های مخروطی بر مبنای تئوری مقاومت مصالح یک‌بعدی با میله‌ها و تیرهای مخروطی الزامات زیر را برآورده می‌نمایند.

- ۱ - وضوح مفهومی همراه با درک فیزیکی. به عنوان مثال، یک پی واقع بر روی سطح یک لایه گیردار در تکیه‌گاه (شکل ۲ - ۵) را در نظر بگیرید. الگوی موج به روشنی فرض می‌گردد. امواج یک‌بعدی با سرعت موج انبساطی و از طریق انعکاس به جلو و عقب، پخش شدن و کاهش دامنه و در نتیجه تابش انرژی در جهت افقی به سمت بی‌نهایت انتشار می‌یابند.
- ۲ - سادگی در فیزیک و پاسخ ریاضی دقیق و کاربرد عملی. به دلیل رفتار تغییرشکل اعمال شده در مخروط‌ها، مدل‌های یک‌بعدی به وجود می‌آید که می‌توان آنها را به صورت دقیق در شکل بسته حل کرد و در حالت‌های بسیاری با یک ماشین حساب دستی تحلیل نمود.
- ۳ - عمومیت کافی با در نظر گرفتن لایه‌بندی و مدفون بودن برای تمام درجات آزادی و تمام فرکانس‌ها.
- ۴ - دقت مهندسی کافی. به طور کلی، برای یک مجموعه از پارامترهای ورودی، انحراف $\pm 20\%$ در نتایج مدل‌های مخروطی از نتایج روش‌های دقیق کافی است، زیرا بسیاری از عدم قطعیت‌ها را هرگز نمی‌توان حذف نمود.
- ۵ - تأمین ویژگی‌های فیزیکی. در تشکیل مدل مخروطی مشخصات معینی به صورت دقیق اعمال می‌شود، از قبیل رفتار دابل مجانب برای مخروط ناقص نیمه‌نامحدود (بخش ۲ - ۲). سایر مشخصات به عنوان نتیجه الگوی موج فرض شده به دقت

۲. مفاهیم مدل مخروطی ۴۳

مدل‌سازی می‌گردند. برای نمونه، همان‌طور که در بخش ۴ - ۳ مورد بحث قرار گرفت، در یک لایه گیردار در تکیه‌گاه، میرایی تابشی در بازه فرکانس، زیر فرکانس قطع (فرکانس اصلی لایه) به وجود نمی‌آید.

تمام ویژگی‌های اشاره شده در بالا کاربرد مدل‌های مخروطی را در موارد روزمره تحلیل‌های عملی ارتعاش پی و اندرکنش دینامیکی خاک - سازه در یک دفتر طراحی ممکن می‌سازد. این روش مقاومت مصالح که در تحلیل تنش در مهندسی سازه بسیار موفق است، این امکان را فراهم نموده تا از پیچیدگی ریاضی (بسیار فراتر از حالت معمول برای مهندسی عمران) راه‌حل‌های دقیق در مکانیک کاربردی اجتناب شود. سادگی و هزینه کم یک تحلیل مجزا اجازه می‌دهد مطالعات پارامتریک که در آن پارامترها با عدم قطعیت زیاد (از قبیل مشخصات خاک) تغییر می‌کنند انجام شود. همچنین اجازه می‌دهد که پارامترهای کلیدی سیستم دینامیکی تعیین گردند و طراحی‌های جایگزین مورد واریسی قرار گیرند. در نهایت، مدل‌های مخروطی را می‌توان به منظور کنترل نتایج روش‌های دقیق‌تر که از طریق برنامه‌های کامپیوتری پیچیده به دست می‌آیند، به کار برد.

همان‌طور که در انتهای بخش ۱ - ۱ ذکر شد، مدل‌های مخروطی به مقداری اُفت دقت می‌انجامند. با این حال، هدف مهندس محاسبه واقعیت پیچیده و تا حد امکان دقیق نمی‌باشد. در یک پروژه متعارف طراحی متعادل که ایمن و اقتصادی نیز باشد، مستلزم نتایج دقیق نیست (که در هر حال به دلیل قابل حذف نبودن موارد عدم قطعیت، دقت محدود است). مدل‌های مخروطی ویژگی‌های برجسته را در نظر گرفته و بر مبنای تجربه به‌دست آمده از تحلیل‌های دقیق استوارند. این مدل‌ها نخستین تلاش برای در نظر گرفتن فیزیک مسئله نیستند! مدل‌های مخروطی کاملاً قابل اطمینان بوده و بیشتر از آن که در نگاه اول به نظر می‌رسد دارای مفهوم‌اند. مدل‌های مخروطی را باید هر کجا که ممکن باشد مورد استفاده قرار داد، زیرا سادگی بر مبنای عقلانیت نهایت کمال است (A. S. Veletsos).



۳

مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون

اولین بلوک سازنده مورد استفاده در محاسبه ارتعاشات یک پی مدفون، از یک دیسک مدفون در یک نیم‌فضای چندلایه تشکیل می‌گردد که به صورت یک مخروط دوپل مدل‌سازی شده و هر مخروط، انتشار موج به سمت بیرون را نمایش می‌دهد. چنین مدلی در شکل ۲ - ۱۰ ب برای درجه آزادی قائم نشان داده شده است. به عنوان حالت ویژه، همان‌طور که در شکل ۲ - ۱۰ الف نمایش داده شده است، دیسک بر روی سطح نیم‌فضا واقع شده که به یک مدل مخروطی یک‌طرفه می‌انجامد. تغییر مکان دیسک (u_0) برای یک نیروی معین (P_0) محاسبه می‌شود. انتشار موج ($u(z)$) به سمت خارج دیسک تحلیل می‌گردد که دیسک نمایان‌گر منبع آشفتگی است. این انتشار موج به سمت بیرون، (در ابتدا) در یک مخروط همگن نیمه‌نامحدود ناقص با مشخصات مصالح لایه مجاور دیسک به وجود می‌آید که مخروط اولیه نامیده می‌شود. یک پی را که به صورت یک دیسک معادل بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن نمایش داده می‌شود، می‌توان به طور مستقیم با مخروط اولیه مدل‌سازی نمود (شکل ۲ - ۲). همین مفهوم برای درجات آزادی افقی و دورانی قابل استفاده است.

بخش ۳ - ۱ مخروط یک طرفه انتقالی را مورد بحث قرار می‌دهد. فرضیه‌ها و ساختمان روش مقاومت مصالح یک‌بعدی با استفاده از یک میله مخروطی شده با افزایش

سطح مقطع در جهت انتشار موج (مشابه یک مخروط) بررسی می‌گردد. رابطه نیروی اندرکنش P_0 - تغییر مکان u_0 دیسک بارگذاری شده استخراج شده و تغییر مکان $u(z)$ در طول مخروط به عنوان تابعی از u_0 تشکیل می‌گردد. تغییر مکان مخروط برای محاسبه موج برخورد f در محل ناپیوستگی مصالح مورد نیاز است (شکل ۲ - ۴ - ب). بخش ۳ - ۲ روابط مشابه برای مخروط یک طرفه دورانی را استخراج می‌نماید که بعداً در بخش ۳ - ۳ مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش ۳ - ۴ اصلاحات موردنیاز برای درجات آزادی قائم و دورانی را هنگامی که نسبت پواسون به $1/2$ می‌رسد، مورد بررسی قرار داده که به یک سرعت موج انبساطی نامحدود می‌انجامد. بخش ۳ - ۵ ضرایب سختی دینامیکی یک پی دایره‌ای واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن را ارائه می‌نماید که با نتایج یک تحلیل دقیق مقایسه شده‌اند. بخش ۳ - ۶ یک دیسک مدفون در یک فضای کامل همگن را مورد بررسی قرار می‌دهد که به یک روش جایگزین برای تشکیل مدل مخروط دابل می‌انجامد. در این بخش یک مقایسه با نتایج تحلیلی انجام شده است.

فصل ۳ (و فصل‌های ۴ و ۵) به روابط مورد نیاز برای محاسبه ضرایب سختی دینامیکی و حرکت ورودی مؤثر پی محدود می‌شود. از آنجا که تحلیل در حوزه فرکانس انجام شده، استخراج روابط نیز برای تحریک هارمونیک در واسطه الاستیک انجام می‌شود. به منظور معرفی میرایی مصالح هیستریسیس، مدول برشی واقعی و مدول مقیدشده در نتایج نهایی در $1 + 2i$ (نسبت میرایی) ضرب شده و به مقادیر مختلط می‌انجامد (مطابق اصل تناظر). برای کامل کردن فصل برخی معادلات به کار برده‌شده در فصل ۲ تکرار شده‌اند. مراجعه به مبانی مورد بحث در فصل ۲ نیز فراهم شده که برای متخصص در زمینه تحلیل ارتعاش پی که آن فصل را به طور سیستماتیک مطالعه نکرده، دسترسی آسان به مهم‌ترین مفاهیم اصلی را ممکن سازد.

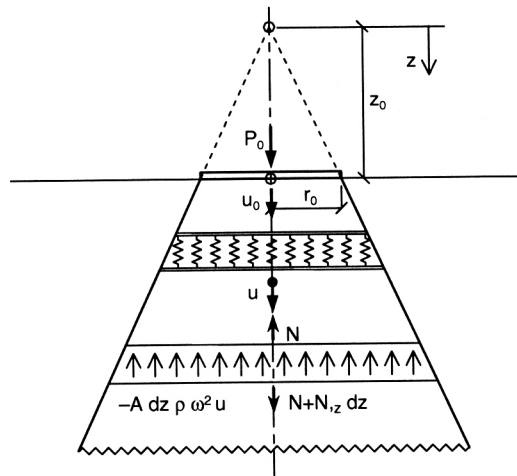
۳-۱ مخروط‌های انتقالی

در این بخش در ابتدا درجه آزادی قائم مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۳ - ۱). یک دیسک به شعاع r_0 واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن با مدول برشی G ، نسبت

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۴۷

پواسون ν ، چگالی جرم ρ و نسبت میرایی هیستریسیس ζ به صورت یک مخروط انتقالی نیمه نامحدود ناقص (یک طرفه) با همان مشخصات مصالح نیم فضا مدل سازی می شود. مدول مقید شده $E_c = \rho c_p^2$ (c_p نمایانگر سرعت موج انبساطی)، ν و ρ به عنوان مشخصات مصالح معرف انتخاب می شوند. هنگامی که $1/2 \rightarrow \nu$ (حالت تراکم ناپذیر)، c_p (E_c) به سمت بی نهایت میل می کند و بنابراین سرعت موج باید محدود باشد تا کاربرد یک مدل مخروطی را ممکن سازد (بخش ۳ - ۴). موارد نسبت پواسون بین $1/3$ و $1/2$ ، به صورت تقریباً تراکم ناپذیر توصیف خواهد شد. به منظور امکان کاربرد همان معادلات برای هر دو حالت تراکم پذیر و تقریباً تراکم ناپذیر، استخراج روابط برای سرعت موج محوری c با مدول الاستیسیته متناظر که به صورت ρc^2 بیان شده، انجام می گردد. زاویه بازشدگی مخروط با نسبت ظاهری z_0/r_0 (ارتفاع رأس z_0) مشخص شده که باید در مرحله پاسخ تعیین گردد. یک بار قائم با دامنه $P_0(\omega)$ به دیسک اعمال شده که به یک تغییر مکان قائم دیسک با دامنه $u_0(\omega)$ منجر می شود. انتشار موج رو به پایین با دامنه $u(z, \omega)$ باید تعیین گردد. در مخروط نمایش دهنده یک میله با افزایش مساحت با عمق z (اندازه گیری شده از رأس) به صورت:

$$A(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 A_0 \quad (1 - 3)$$



شکل ۳-۱ مخروط نیمه نامحدود ناقص انتقالی با حرکت قائم، اعوجاج محوری و تعادل المان بی نهایت کوچک.

۴۸ تحلیل ارتعاشات پی

(که در آن $A_0 = \pi r_0^2$)، کرنش‌های محوری وجود دارد (مقاطع صفحه به صورت صفحه باقی می‌مانند). برای تشریح مفهوم، توصیف عمومی شکل ۲-۲ الف را می‌توان بیان نمود. برای تحریک هارمونیک، شکل دامنه مختلط (پیوست الف - ۱) برابر است با:

$$P_0(t) = P_0(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{الف} - ۲ - ۳)$$

$$u(t) = u(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{ب} - ۲ - ۳)$$

به منظور تشکیل معادله حرکت، تعادل یک المان بی‌نهایت کوچک فرمول‌بندی می‌شود (شکل ۳-۱). این فرمول‌بندی با نیروی عمودی با دامنه $N(z, \omega)$ و نیروی اینرسی (محاسبه شده به صورت حاصل ضرب جرم المان در شتاب در جهت منفی z) با دامنه $(\ddot{u}(z, \omega) = -\omega^2 u(z, \omega))$ (زیرا $A(z) dz \rho \omega^2 u(z, \omega)$)

$$-N(z, \omega) + N(z, \omega) + N(z, \omega)_{,z} dz + \omega^2 A(z) \rho dz u(z, \omega) = 0 \quad (\text{الف} - ۳ - ۳)$$

یا

$$N(z, \omega)_{,z} + \omega^2 A(z) \rho u(z, \omega) = 0 \quad (\text{ب} - ۳ - ۳)$$

با جایگزین نمودن رابطه نیروی عمودی - تغییر مکان با اعوجاج محوری با دامنه $u(z, \omega)_{,z}$

$$N(z, \omega) = \rho c^2 A(z) u(z, \omega)_{,z} \quad (\text{۴} - ۳)$$

در رابطه ۳-۳ ب و با استفاده از رابطه ۳-۱ معادله حرکت مخروط انتقالی به دست می‌آید:

$$u(z, \omega)_{,zz} + \frac{2}{z} u(z, \omega)_{,z} + \frac{\omega^2}{c^2} u(z, \omega) = 0 \quad (\text{۵} - ۳)$$

که می‌توان آن را به صورت یک معادله موج یک‌بعدی با تابع $zu(z, \omega)$ به صورت زیر نوشت:

$$(zu(z, \omega))_{,zz} + \frac{\omega^2}{c^2} (zu(z, \omega)) = 0 \quad (\text{۶} - ۳)$$

پاسخ این معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر مفروض می‌گردد:

$$zu(z, \omega) = e^{i\gamma z} \quad (\text{۷} - ۳)$$

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۴۹

از جایگزینی رابطه ۳ - ۷ در رابطه ۳ - ۶ خواهیم داشت:

$$-\gamma^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (۳ - ۸ - الف)$$

که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\gamma = \pm \frac{\omega}{c} \quad (۳ - ۸ - ب)$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$zu(z, \omega) = c_1 e^{i\frac{\omega}{c}z} + c_2 e^{-i\frac{\omega}{c}z} \quad (۳ - ۹)$$

که ثابت‌های انتگرال c_1 و c_2 می‌باشند.

پاسخ در حوزه زمان برابر با حاصل ضرب دامنه تعیین شده از رابطه ۳ - ۹ در $e^{i\omega t}$ است (رابطه ۳ - ۲ - ب). به طور مثال، عبارت دوم $e^{i\omega(t-z/c)}$ با یک موج انتشار یافته در جهت مثبت z با سرعت c متناظر است. این مطلب به صورت زیر تأیید می‌شود. اگر t به مقدار \bar{t} و z نیز همزمان به مقدار $c\bar{t}$ افزایش یابد، مقدار $e^{i\omega(t-z/c)} = e^{i\omega(t+\bar{t}-(z+c\bar{t})/c)}$ دچار تغییر نمی‌شود. به‌طور مشابه، عبارت اول با یک موج در حال انتشار در جهت منفی z متناظر است. با اعمال یک بار به دیسک، موج به سمت بیرون از منبع آشفتگی یعنی رو به پایین در جهت مثبت z انتشار خواهد یافت. بنابراین، تنها عبارت دوم با ثابت انتگرال c_2 وجود دارد که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$zu(z, \omega) = c_2 e^{-i\frac{\omega}{c}z} \quad (۳ - ۱۰)$$

با اعمال شرط مرزی

$$u(z = z_0, \omega) = u_0(\omega) \quad (۳ - ۱۱)$$

خواهیم داشت:

$$u(z, \omega) = \frac{z_0}{z} e^{-i\frac{\omega}{c}(z-z_0)} u_0(\omega) \quad (۳ - ۱۲)$$

بنابراین، دامنه تغییر مکان با عکس فاصله از رأس مخروط متناسب است. رابطه ۳ - ۱۲ دامنه تغییر مکان را در فاصله $z - z_0$ از دیسک با دامنه تغییر مکان $u_0(\omega)$ مشخص می‌کند. این رابطه برای محاسبه دامنه تغییر مکان موج برخورد اعمال شده به یک ناپیوستگی مصالح سودمند است.

۵۰ تحلیل ارتعاشات پی

حال رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان دیسک مورد بررسی قرار می‌گیرد. از تعادل دیسک رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$P_0(\omega) = -N(z = z_0, \omega) \quad (۱۳ - ۳)$$

با جایگزینی مشتق $u(z, \omega)$ از رابطه ۳ - ۱۲ در رابطه ۳ - ۴ به ازای $z = z_0$ ، رابطه ۳ - ۱۳ به رابطه زیر می‌انجامد:

$$P_0(\omega) = \left(\frac{\rho c^2 A_0}{z_0} + i\omega \rho A_0 \right) u_0(\omega) \quad (۱۴ - ۳)$$

یا

$$P_0(\omega) = S(\omega) u_0(\omega) \quad (۱۵ - ۳)$$

که در آن ضریب سختی دینامیکی مطابق رابطه زیر است:

$$S(\omega) = \frac{\rho c^2 A_0}{z_0} + i\omega \rho c A_0 \quad (۱۶ - ۳)$$

ضریب فنر K (ضریب سختی استاتیکی) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \frac{\rho c^2 A_0}{z_0} \quad (۱۷ - ۳)$$

ضریب میراگر C مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$C = \rho c A_0 \quad (۱۸ - ۳)$$

و با

$$\dot{u}_0(\omega) = i\omega u_0(\omega) \quad (۱۹ - ۳)$$

رابطه ۳ - ۱۴ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$P_0(\omega) = K u_0(\omega) + C \dot{u}_0(\omega) \quad (۲۰ - ۳)$$

این رابطه، برای مدل فنر - میراگر که در شکل ۲ - ۲ ارائه شده، متناظر است با رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان که در رابطه ۲ - ۲۴ در حوزه زمان (با قرار دادن $c = c_p$) فرمول‌بندی شده است.

رابطه ۳ - ۱۴ امکان محاسبه دامنه تغییر مکان دیسک $u_0(\omega)$ را برای دامنه بار مشخص $P_0(\omega)$ که بر روی دیسک اعمال شده، در حضور یک مخروط یکطرفه فراهم می‌نماید.

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۵۱

با استفاده از فرکانس بدون بعد تعریف شده بر حسب مشخصات مخروط به صورت زیر:

$$b_0 = \frac{\omega z_0}{c} \quad (۲۱ - ۳)$$

تجزیه ضریب سختی دینامیکی رابطه ۳ - ۱۶ مشابه رابطه ۱ - ۵ برابر است با:

$$S(b_0) = K[k(b_0) + ib_0 c(b_0)] \quad (۲۲ - ۳)$$

با داشتن ضرایب بدون بعد فنر و میراگر (که برای مخروط انتقالی مستقل از b_0 هستند) به صورت زیر:

$$k(b_0) = 1 \quad (الف - ۲۳ - ۳)$$

$$c(b_0) = 1 \quad (ب - ۲۳ - ۳)$$

و معرفی فرکانس بدون بعد استاندارد دیسک مطابق رابطه

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{c_s} \quad (۲۴ - ۳)$$

که در آن c_s سرعت موج برشی را نشان می دهد، رابطه ۳ - ۱۶ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$S(a_0) = K[k(a_0) + ia_0 c(a_0)] \quad (۲۵ - ۳)$$

که در آن روابط زیر برقرار است:

$$k(a_0) = 1 \quad (الف - ۲۶ - ۳)$$

$$c(a_0) = \frac{z_0 c_s}{r_0 c} \quad (ب - ۲۶ - ۳)$$

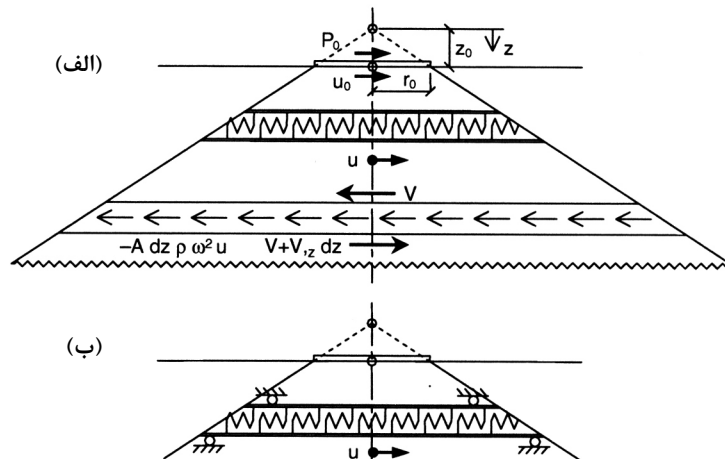
به منظور تعیین نسبت ظاهری r_0 / z_0 و بنابراین زاویه بازشدگی مخروط، ضریب سختی استاتیکی مخروط نیمه نامحدود ناقص (رابطه ۳ - ۱۷) با پاسخ دقیق متناظر در تئوری الاستیسیته سه بعدی برای دیسک واقع بر روی یک نیم فضا، مطابق رابطه زیر مطابقت داده می شود.

$$K_{exact} = \frac{4\rho c_s^2 r_0}{1 - \nu} \quad (۲۷ - ۳)$$

(رابطه ۲ - ۱۵ با مدول برشی $G = \rho c_s^2$). از معادل سازی روابط ۳ - ۱۷ و ۳ - ۲۷ رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{4} (1 - \nu) \left(\frac{c}{c_s} \right)^2 \quad (۲۸ - ۳)$$

که تابعی از نسبت پواسون ν است. برای $c = c_p$ رابطه ۲ - ۱۶ حاصل می شود.



شکل ۳-۲ مخروط نیمه نامحدود ناقص انتقالی با حرکت افقی، اعوجاج برشی و تعادل عنصر بی نهایت کوچک، که در آن به وسیله الف) صلبیت خمشی نامحدود؛ ب) غلتک‌هایی برای حرکت افقی، از حرکت دورانی جلوگیری شده است.

حال درجه آزادی افقی که با مخروط خود مدل‌سازی شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۳-۲ - الف). مشخصات مصالح الاستیک مخروط انتقالی نیمه نامحدود ناقص به صورت $G = \rho c_s^2$ ، v و ρ انتخاب شده که با مشخصات مصالح مربوط به نیمه فضا برابر قرار داده شده‌اند. اعمال یک بار افقی با دامنه $P_0(\omega)$ منجر به تغییر مکان افقی دیسک با دامنه $u_0(\omega)$ می‌گردد.

رابطه ۳-۱ همچنان با $A(z)$ که مساحت برشی را نشان می‌دهد، برقرار است زیرا کرنش‌های برشی وجود دارند. دامنه نیروی برشی (مشابه رابطه ۳-۴) برابر است با:

$$V(z, \omega) = \rho c_s^2 A(z) u(z, \omega), z \quad (3-29)$$

که در آن $u(z, \omega)$ دامنه تغییر مکان جانبی است و z ، دامنه اعوجاج برشی را نشان می‌دهد. معادله تعادل از رابطه ۳-۳ - ب با جایگزین نمودن $N(z, \omega)$ با $V(z, \omega)$ پیروی می‌کند. استخراج روابط به صورت مشابه، اما برای $c = c_s$ می‌باشد. دامنه تغییر مکان موج برخورد از رابطه ۳-۱۲ و ضریب سختی دینامیکی از رابطه ۳-۱۶ (و روابط ۳-۲۲ و ۳-۲۵)

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۵۳

با قرار دادن $c = c_s$ تبعیت می‌نماید. رابطه ۳ - ۲۶ - ب به رابطه $c(a_0) = z_0 / r_0$ می‌انجامد. از مطابقت ضریب سختی استاتیکی افقی دقیق یک دیسک بر روی یک نیم‌فضا

$$K_{exact} = \frac{8\rho c_s^2 r_0}{2 - \nu} \quad (۳۰ - ۳)$$

با پاسخ متناظر برای مخروط نیمه‌نامحدود ناقص در رابطه ۳ - ۱۷ با قرار دادن $c = c_s$ ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{8}(2 - \nu) \quad (۳۱ - ۳)$$

بنابراین زاویه بازشدگی به درجه آزادی وابسته است. شکل‌های ۳ - ۱ و ۳ - ۲، با $\nu = 1/3$ متناظرند.

درحالی‌که مدل مخروطی برای درجه آزادی قائم بر مبنای روش مقاومت مصالح یک میله مخروطی استوار است، با این حال برای درجه آزادی افقی صادق نیست. در این حالت، کوپل با درجه آزادی دورانی به وجود می‌آید. در پاسخ دقیق تعیین شده از الاستودینامیک سه‌بعدی برای یک دیسک واقع بر روی یک نیم‌فضا، کوپل بین درجات آزادی افقی و دورانی ایجاد می‌شود که از آن به دلیل کوچک بودن صرف‌نظر می‌گردد. در مدل مخروطی برای درجه آزادی افقی، صلبیت خمشی برابر بی‌نهایت فرض شده که از هرگونه دوران سطح مقطع جلوگیری می‌شود (شکل ۳ - ۲ - الف). از آنجا که صلبیت خمشی یک تیر با سطح مقطع دایره‌ای به صورت $\rho c_p^2 \pi r_0^4 / 4$ (یا $\rho c^2 \pi r_0^4 / 4$) است، این مقدار برابر بی‌نهایت نیست. صلبیت خمشی را می‌توان بی‌نهایت فرض نمود که همان‌طور که قبلاً اشاره شد، منجر به دوران صفر می‌شود. اما با در نظر گرفتن تعادل، همچنان لنگر خمشی وجود دارد (شکل ۳ - ۲ - الف). در مقابل، غلتک‌های در جهت افقی را می‌توان اضافه نمود (شکل ۳ - ۲ - ب). در این حالت نه تنها از دوران جلوگیری می‌شود، بلکه لنگر عکس‌العمل ایجاد شده در غلتک‌ها، لنگر ناشی از بار اعمال شده را خنثی نموده و لنگر برآیند صفر حاصل می‌شود. به منظور در نظر گرفتن میرایی مصالح اصل تناظر به کار برده می‌شود. این اصل بیان می‌کند که پاسخ میرا شده، از جایگزین کردن مدول‌های الاستیسیته با مدول‌های مختلط متناظر، در پاسخ الاستیک مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

۵۴ تحلیل ارتعاشات بی

$$E_c \rightarrow E_c^* = \rho c_p^2 (1 + 2i\zeta) \quad (\text{الف} - ۳۲ - ۳)$$

$$G \rightarrow G^* = \rho c_s^2 (1 + 2i\zeta) \quad (\text{ب} - ۳۲ - ۳)$$

برای سهولت، همان نسبت میرایی هیستریسیس برای اعوجاج محوری و برشی نیز فرض می‌شود. دقت کنید که این اصلاح نیز بر سرعت‌های موج

$$c_s \rightarrow c_s^* = c_s \sqrt{1 + 2i\zeta} \quad (\text{الف} - ۳۳ - ۳)$$

$$c_p \rightarrow c_p^* = c_p \sqrt{1 + 2i\zeta} \quad (\text{ب} - ۳۳ - ۳)$$

و فرکانس بدون بعد

$$a_0 \rightarrow a_0^* = \frac{a_0}{\sqrt{1 + 2i\zeta}} \quad (\text{۳۴} - ۳)$$

در تمام معادلات تأثیر می‌گذارد، اما نسبت پواسون ν تغییر نمی‌کند. بر مبنای استاتیک نسبت‌های ظاهری z_0/r_0 دچار تغییر نمی‌شود. با این حال، هنگامی که ضریب سختی دینامیکی بر حسب a_0^* رسم شود، تنها از بخش حقیقی a_0^* استفاده شده که به صورت a_0 در نظر گرفته می‌شود.

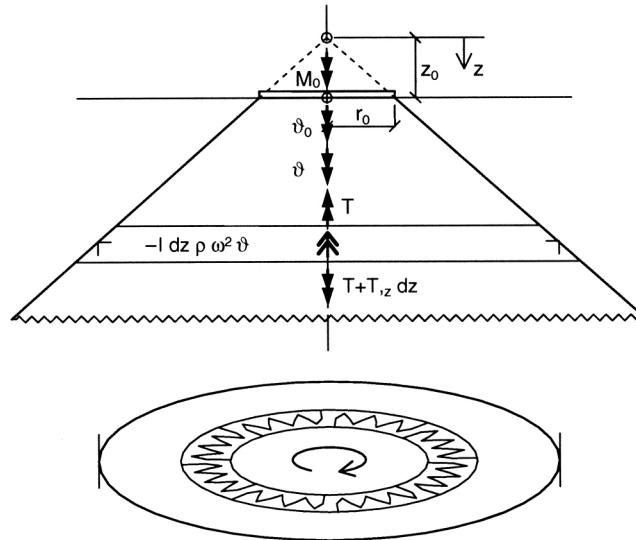
۲-۳ مخروط‌های دورانی

در این بخش، ابتدا درجه آزادی پیچشی مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۳-۳). یک دیسک به شعاع r_0 بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن با مدول برشی $G = \rho c_s^2$ ، چگالی جرم ρ و نسبت میرایی هیستریسیس ζ به عنوان یک مخروط دورانی نیمه‌نامحدود ناقص یک‌طرفه با همان مشخصات مصالح نیم‌فضا مدل سازی می‌شود. یک لنگر پیچشی (گشتاور) با دامنه $M_0(\omega)$ به دیسک اعمال شده که منجر به یک دوران پیچشی (تابیدگی) دیسک با دامنه $\mathcal{Q}_0(\omega)$ می‌شود. انتشار موج رو به پایین با دامنه $\mathcal{Q}(z, \omega)$ باید تعیین گردد. زاویه بازشدگی مخروط که با نسبت ظاهری z_0 / r_0 تعیین می‌شود نیز باید محاسبه شود. در مخروط نمایان‌گر یک میله با افزایش ممان اینرسی قطبی با عمق z (اندازه‌گیری شده از رأس) که به صورت زیر می‌باشد:

$$I(z) = \left(\frac{z}{z_0} \right)^4 I_0 \quad (\text{۳۵} - ۳)$$

(با $I_0 = \pi r_0^4 / 2$)، کرنش‌های برشی وجود دارند.

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۵۵



شکل ۳-۳ مخروط نیمه نامحدود ناقص دورانی با حرکت پیچشی، تعادل عنصر بی نهایت کوچک و اعوجاج پیچشی (تابیدگی).

شکل دامنه مختلط برای تحریک هارمونیک (پیوست الف - ۱) به صورت روابط زیر

می باشد:

$$M_0(t) = M_0(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{الف - ۳۶ - ۳})$$

$$\vartheta(t) = \vartheta(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{ب - ۳۶ - ۳})$$

به منظور تشکیل معادله حرکت تعادل، یک المان بی نهایت کوچک فرمول بندی می شود (شکل ۳-۳). از این تعادل، با لنگر پیچشی با دامنه $T(z, \omega)$ و نیروی ممان اینرسی چرخشی (محاسبه شده به صورت حاصل ضرب ممان اینرسی جرم قطبی المان در شتاب دوران پیچشی در جهت منفی z) با دامنه $-I(z) dz \rho \omega^2 \vartheta(z, \omega)$ (با توجه به اینکه $\ddot{\vartheta}(z, \omega) = -\omega^2 \vartheta(z, \omega)$)، رابطه زیر حاصل می شود:

$$-T(z, \omega) + T(z, \omega) + T(z, \omega)_{,z} dz + \omega^2 I(z) \rho dz \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (\text{الف - ۳۷ - ۳})$$

یا

$$T(z, \omega)_{,z} + \omega^2 I(z) \rho \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (\text{ب - ۳۷ - ۳})$$

۵۶ تحلیل ارتعاشات بی

از جایگزینی رابطه لنگر پیچشی - دوران مطابق رابطه ۳ - ۳۸:

$$T(z, \omega) = \rho c_s^2 I(z) \vartheta(z, \omega),_z \quad (38 - 3)$$

در رابطه ۳ - ۳۷ - ب و با استفاده از رابطه ۳ - ۳۵ معادله حرکت مخروط دورانی به دست می‌آید:

$$\vartheta(z, \omega),_{zz} + \frac{4}{z} \vartheta(z, \omega),_z + \frac{\omega^2}{c_s^2} \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (39 - 3)$$

پاسخ برابر است با:

$$\vartheta(z, \omega) = c_2 \left(\frac{1}{z^3} + i \frac{\omega}{c_s} \frac{1}{z^2} \right) e^{-i \frac{\omega}{c_s} z} \quad (40 - 3)$$

که در آن c_2 ثابت انتگرال است. این عبارت با $e^{-i\omega z/c_s}$ ، با موجی که در جهت مثبت z و سرعت c_s انتشار یافته، متناظر است. تأیید این مطلب مشابه روش توصیف شده در پاراگراف بعد از رابطه ۳ - ۹ است. عبارت دیگر با $e^{i\omega z/c_s}$ (که در رابطه ۳ - ۴۰ وجود ندارد) با یک موج انتشار یافته در جهت منفی z یعنی به سمت دیسک متناظر می‌باشد که به صورت فیزیکی غیر ممکن است. اعمال شرط مرزی

$$\vartheta(z = z_0, \omega) = \vartheta_0(\omega) \quad (41 - 3)$$

به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\vartheta(z, \omega) = \frac{(z_0^3/z^3) + i(\omega/c_s)(z_0^3/z^2)}{1 + i(\omega/c_s)z_0} e^{-i \frac{\omega}{c_s}(z-z_0)} \vartheta_0(\omega) \quad (42 - 3)$$

رابطه ۳ - ۴۲ دامنه دوران در فاصله $z - z_0$ را از دیسک با دامنه دوران $\vartheta_0(\omega)$ مشخص می‌نماید. این رابطه برای محاسبه دامنه دوران موج برخورد اعمال شده به ناپیوستگی مصالح سودمند است.

اکنون رابطه لنگر اندرکنش - دوران دیسک مورد بررسی قرار می‌گیرد. تعادل دیسک

به رابطه زیر می‌انجامد:

$$M_0(\omega) = -T(z = z_0, \omega) \quad (43 - 3)$$

از جایگزین نمودن مشتق $\vartheta(z, \omega),_z$ محاسبه شده از رابطه ۳ - ۴۲ در رابطه ۳ - ۳۸ به‌ازای $z = z_0$ ، رابطه ۳ - ۴۳ به رابطه زیر می‌انجامد:

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۵۷

$$M_0(\omega) = S_\vartheta(b_0)\vartheta_0(\omega) \quad (۴۴ - ۳)$$

که در آن ضریب سختی دینامیکی مطابق رابطه زیر است:

$$S_\vartheta(b_0) = K_\vartheta[k_\vartheta(b_0) + ib_0 c_\vartheta(b_0)] \quad (۴۵ - ۳)$$

ضریب سختی استاتیکی K_ϑ (با توجه به این که $I_0 = \pi r_0^4 / 2$) به صورت زیر تعریف می شود:

$$K_\vartheta = \frac{3\rho c_s^2 I_0}{z_0} \quad (۴۶ - ۳)$$

ضرایب بدون بعد فنر و میراگر مطابق روابط زیر می باشند:

$$k_\vartheta(b_0) = 1 - \frac{1}{3} \frac{b_0^2}{1 + b_0^2} \quad (\text{الف} - ۴۷ - ۳)$$

$$c_\vartheta(b_0) = \frac{1}{3} \frac{b_0^2}{1 + b_0^2} \quad (\text{ب} - ۴۷ - ۳)$$

و فرکانس بدون بعد برحسب مشخصات مخروط به صورت زیر تعریف می شود:

$$b_0 = \frac{\omega z_0}{c_s} \quad (۴۸ - ۳)$$

رابطه ۳ - ۴۴ امکان تعیین دوران دیسک با دامنه $\vartheta_0(\omega)$ برای یک لنگر معین با

دامنه $M_0(\omega)$ بر روی دیسک را در حضور یک مخروط یک طرفه فراهم می سازد.

با معرفی فرکانس بدون بعد استاندارد دیسک مطابق با رابطه ۳ - ۴۹:

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{c_s} \quad (۴۹ - ۳)$$

رابطه ۳ - ۴۵ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$S_\vartheta(a_0) = K_\vartheta[k_\vartheta(a_0) + ia_0 c_\vartheta(a_0)] \quad (۵۰ - ۳)$$

که در آن،

$$k_\vartheta(a_0) = 1 - \frac{1}{3} \frac{a_0^2}{(r_0/z_0)^2 + a_0^2} \quad (\text{الف} - ۵۱ - ۳)$$

$$c_\vartheta(a_0) = \frac{1}{3} \frac{z_0}{r_0} \frac{a_0^2}{(r_0/z_0)^2 + a_0^2} \quad (\text{ب} - ۵۱ - ۳)$$

۵۸ تحلیل ارتعاشات پی

توجه نمایید که حد فرکانس بالا $\omega \rightarrow \infty$ برای $S_g(a_0)$ برابر است با:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} S_g(a_0) = i\omega C_\theta \quad (52-3)$$

که در آن، میراگر با حد فرکانس بالا برای میرایی تابشی مطابق رابطه زیر است:

$$C_\theta = \rho c_s I_0 \quad (53-3)$$

به منظور تعیین نسبت ظاهری z_0 / r_0 و بنابراین زاویه بازشدگی مخروط، ضریب سختی/استاتیکی K_θ مخروط نیمه نامحدود ناقص (رابطه ۳ - ۴۶) با پاسخ دقیق متناظر در تئوری الاستیسیته سه بعدی برای دیسک واقع بر روی یک نیم فضا، مطابق رابطه زیر، مطابقت داده می شود:

$$K_{\theta exact} = \frac{16}{3} \rho c_s^2 r_0^3 \quad (54-3)$$

از روابط ۳ - ۴۶ و ۳ - ۵۴ رابطه زیر به دست می آید:

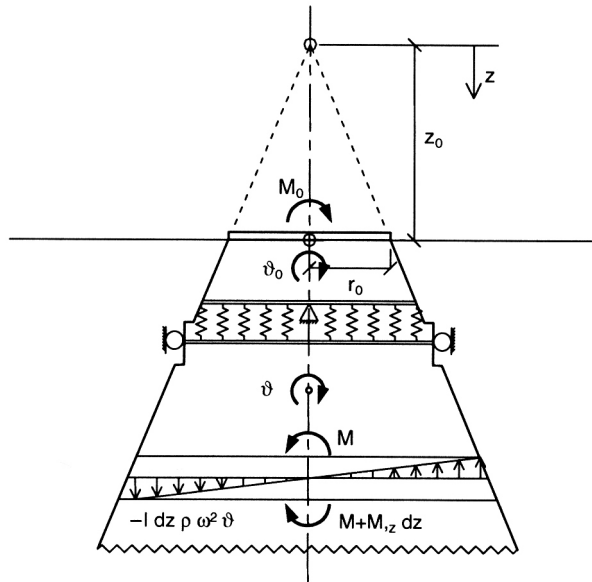
$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{9\pi}{32} \quad (55-3)$$

همان طور که برای درجه آزادی پیچشی انتظار می رود، زاویه بازشدگی مستقل از نسبت پواسون ν است.

حال درجه آزادی دورانی که با مخروط خود مدل سازی شده است، مورد بررسی قرار می گیرد (شکل ۳ - ۴). مشابه درجه آزادی قائم مورد بحث در ابتدای بخش ۳ - ۱، به منظور امکان استخراج معادلاتی که حالت تقریباً تراکم ناپذیر را پوشش می دهند، استخراج برای سرعت موج محوری c با مدول الاستیسیته متناظر که به عنوان ρc^2 بیان شده است، انجام می شود. برای حالت تراکم پذیر، c برابر سرعت موج انبساطی c_p و E برابر مدول مقید شده E_c می باشد. علاوه بر c ، نسبت پواسون ν و چگالی جرم ρ به عنوان مشخصات مصالح الاستیک انتخاب می شوند. یک لنگر خمشی با دامنه $M_0(\omega)$ به دیسک اعمال شده که به یک دوران چرخشی دیسک با دامنه $\theta_0(\omega)$ منجر می شود. در مخروط نمایان گر یک تیر با افزایش ممان اینرسی با عمق z (اندازه گیری شده از رأس) به صورت

$$I(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^4 I_0 \quad (56-3)$$

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۵۹



شکل ۳-۴ مخروط نیمه نامحدود ناقص دورانی با حرکت چرخشی، اعوجاج محوری دورانی و تعادل المان بی نهایت کوچک، که در آن به وسیله تکیه‌گاه بر روی محور یا با غلتک‌هایی برای حرکت قائم، از حرکت افقی جلوگیری شده است.

با $(I_0 = \pi r_0^4 / 4)$ ، کرنش‌های محوری به صورت پادمتز نسبت به محور وجود دارند. دامنه لنگر خمشی با انحنا به دامنه $\vartheta(z, \omega), z$ (مشابه رابطه ۳-۳۸) برابر است با:

$$M(z, \omega) = \rho c^2 I(z) \vartheta(z, \omega), z \quad (57-3)$$

که در آن $\vartheta(z, \omega)$ دامنه دوران چرخشی است. معادله تعادل از رابطه ۳-۳۷ ب با جایگزین نمودن $T(z, \omega)$ با $M(z, \omega)$ پیروی می‌کند. استخراج روابط به صورت مشابه اما با جایگزینی c_s با c می‌باشد. دامنه دوران موج برخورد از رابطه ۳-۴۲ تبعیت نموده و ضریب سختی دینامیکی از رابطه ۳-۴۵ با b_0 در رابطه ۳-۴۸ و جایگزینی c_s با c پیروی می‌کند. ضریب سختی استاتیکی (با $I_0 = \pi r_0^4 / 2$) برابر است با:

$$K_\vartheta = \frac{3\rho c^2 I_0}{z_0} \quad (58-3)$$

۶۰ تحلیل ارتعاشات پی

میراگر با حد فرکانس بالا برای میرایی تابشی به صورت رابطه زیر است:

$$C_{\vartheta} = \rho c I_0 \quad (۵۹ - ۳)$$

از آنجا که a_0 همچنان برحسب c_s تعریف می‌شود (رابطه ۳ - ۴۹)، ضرایب بدون بعد فنر و میراگر برابرند با (رابطه ۳ - ۵۱):

$$k_{\vartheta}(a_0) = -\frac{1}{3} \frac{a_0^2}{(r_0 c)^2 / (z_0 c_s)^2 + a_0^2} \quad (۶۰ - الف)$$

$$c_{\vartheta}(a_0) = \frac{1}{3} \frac{z_0 c_s}{r_0 c} \frac{a_0^2}{(r_0 c)^2 / (z_0 c_s)^2 + a_0^2} \quad (۶۰ - ب)$$

که در آن رابطه ۳ - ۵۰ صادق است. از مطابقت دادن ضریب سختی استاتیکی دورانی دقیق یک دیسک بر روی یک نیم‌فضا

$$K_{\vartheta exact} = \frac{8 \rho c_s^2 r_0^3}{3(1 - \nu)} \quad (۶۱ - ۳)$$

با پاسخ متناظر برای مخروط نیمه‌نامحدود ناقص در رابطه ۳ - ۵۸، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{9\pi}{32} (1 - \nu) \left(\frac{c}{c_s} \right)^2 \quad (۶۲ - ۳)$$

که تابعی از ν می‌باشد. زاویه بازشدگی نشان داده شده در شکل ۳ - ۴ با $\nu = 1/3$ متناظر است.

مدل دورانی توصیف شده از فرضیات منحصر به فردی در مقاومت مصالح برخوردار

است. اگرچه فهم این فرضیات برای فرمول‌بندی مدل مورد نیاز نیست، با این حال برای تکمیل بحث در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳ - ۳ تفسیر مخروط دورانی

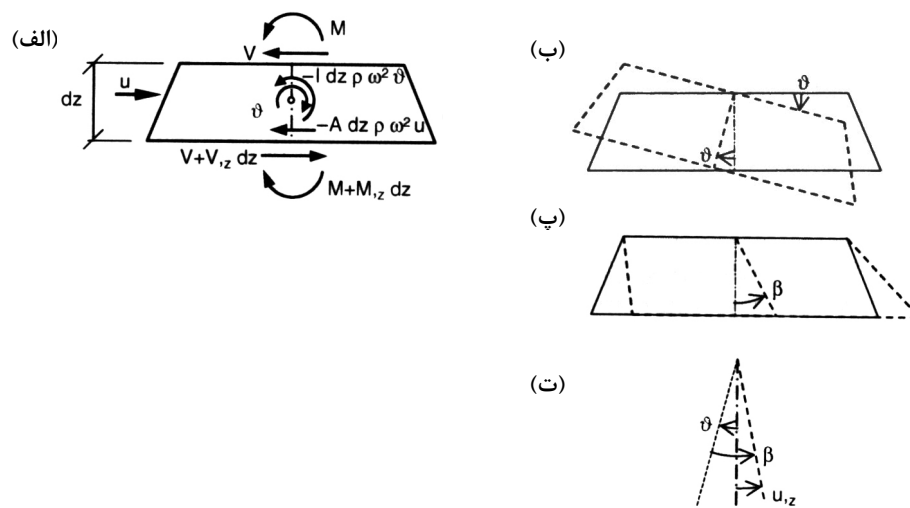
مدل مخروطی برای درجه آزادی پیچشی (شکل ۳ - ۳)، بر مبنای روش مقاومت مصالح یک میله مخروطی استوار است. این پرسش مطرح می‌شود که آیا مدل مربوط به درجه آزادی دورانی (شکل ۳ - ۴) را می‌توان به صورت یک مدل تیر تفسیر نمود یا خیر. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، با استفاده از یک تکیه‌گاه بر روی محوری که حرکت قائم

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۶۱

پادمتر را اعمال می کند یا توسط قرار دادن غلتک‌هایی برای حرکت قائم از حرکت افقی سطح مقطع جلوگیری می شود. در این مدل معتبر از فرمول بندی تعادل نتیجه می شود که نیروی برشی افقی بر روی سطح مقطع برابر صفر است. دوران‌های سطوح مقطع صلب دارای جرم به وجود می آید، اما منجر به تغییر مکان‌های افقی جانبی نمی شود. چنین تغییر مکان‌هایی به نیروهای اینرسی افقی می انجامد که نیروهای برشی و در نتیجه کوپل میان درجات آزادی دورانی و افقی را به وجود می آورد.

به منظور بررسی بیشتر پرسش بالا، تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی بر روی تغییر مکان جانبی یک تیر مورد بررسی قرار می گیرد (شکل ۳ - ۵). شکل ۳ - ۵ - الف نیروها، لنگرها و بارهای اعمال شده بر روی المان بی نهایت کوچک را نمایش می دهد. این شکل ترکیبی از المان‌های بی نهایت کوچک برای تغییر مکان جانبی محور با دامنه $u(z, \omega)$ (شکل ۳ - ۲ - الف) و برای دوران سطح مقطع با دامنه $\vartheta(z, \omega)$ (شکل ۳ - ۴) می باشد. فرمول بندی تعادل لنگر که به شکل زیر می باشد:

$$-M(z, \omega) + M(z, \omega) + M(z, \omega)_{,z} dz - V(z, \omega) dz + \omega^2 I(z) \rho dz \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (۳ - ۶۳)$$



شکل ۳ - ۵ عنصر تیر بی نهایت کوچک با تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی. الف) نیروها، لنگرها و بارها؛ ب) تغییر شکل حاصل از دوران سطح مقطع؛ پ) تغییر شکل حاصل از اعوجاج برشی؛ ت) شیب حاصل از محور تغییر شکل یافته نهایی.

۶۲ تحلیل ارتعاشات پی

به رابطه زیر می‌انجامد:

$$M(z, \omega)_{,z} - V(z, \omega) + \omega^2 I(z) \rho \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (۶۴ - ۳)$$

و از تعادل نیرو

$$-V(z, \omega) + V(z, \omega) + V(z, \omega)_{,z} dz + \omega^2 A(z) \rho dz u(z, \omega) = 0 \quad (۶۵ - ۳)$$

رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V(z, \omega)_{,z} + \omega^2 I(z) \rho u(z, \omega) = 0 \quad (۶۶ - ۳)$$

رابطه لنگر خمشی - دوران سطح مقطع (رابطه ۳ - ۵۷) برابر است با:

$$M(z, \omega) = \rho c_s^2 I(z) \vartheta(z, \omega)_{,z} \quad (۶۷ - ۳)$$

و رابطه نیروی برشی - اعوجاج برشی (شکل ۳ - ۲۹ را ببینید) به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$V(z, \omega) = \rho c_s^2 A(z) \beta(z, \omega) \quad (۶۸ - ۳)$$

که در آن، اعوجاج برشی با دامنه $\beta(z, \omega)$ وجود دارد.

المان‌های بی‌نهایت کوچک تغییرشکل یافته به وسیله دوران سطح مقطع و اعوجاج برشی به ترتیب در شکل‌های ۳ - ۵ - ب و ۳ - ۵ - پ نشان داده شده‌اند. شکل ۳ - ۵ - ت رابطه جنبشی بین زوایای مختلف و دامنه شیب محور را که مشتق تغییرمکان جانبی با دامنه $u(z, \omega)_{,z}$ است، نمایش می‌دهد که در آن:

$$u(z, \omega)_{,z} = -\vartheta(z, \omega) + \beta(z, \omega) \quad (۶۹ - ۳)$$

از حل رابطه ۳ - ۶۹ برای $\beta(z, \omega)$ و جایگزینی در رابطه ۳ - ۶۸ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$V(z, \omega) = \rho c_s^2 A(z) (\vartheta(z, \omega) + u(z, \omega)_{,z}) \quad (۷۰ - ۳)$$

جایگزین نمودن روابط ۳ - ۶۷ و ۳ - ۷۰ در روابط ۳ - ۶۴ و ۳ - ۶۶ به معادلات حرکت بیان‌شده بر حسب $\vartheta(z, \omega)$ و $u(z, \omega)$ می‌انجامد:

$$(\rho c_s^2 I(z) \vartheta(z, \omega)_{,z})_{,z} - \rho c_s^2 A(z) (\vartheta(z, \omega) + u(z, \omega)_{,z}) + \omega^2 I(z) \rho \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (۷۱ - ۳)$$

$$(\rho c_s^2 A(z) (\vartheta(z, \omega) + u(z, \omega)_{,z}))_{,z} + \omega^2 A(z) \rho u(z, \omega) = 0 \quad (۷۲ - ۳)$$

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۶۳

به منظور تشکیل معادلات حاکم بر مدل نشان داده شده در شکل ۳ - ۴، مدول برشی

$G = \rho c_s^2$ برابر صفر قرار داده می شود. از رابطه ۳ - ۷۰ رابطه زیر حاصل می شود:

$$V(z, \omega) = 0 \quad (۷۳ - ۳)$$

که نشان دهنده از بین رفتن نیروی برشی است، و از رابطه ۳ - ۷۲ رابطه زیر به دست می آید.

$$u(z, \omega) = 0 \quad (۷۴ - ۳)$$

که نشان دهنده صفر بودن تغییر مکان جانبی است. رابطه ۳ - ۶۹ به رابطه زیر می انجامد:

$$\beta(z, \omega) = \vartheta(z, \omega) \quad (۷۵ - ۳)$$

به این معنی که اعوجاج برشی برابر دوران سطح مقطع است و با در نظر گرفتن علامت های متفاوت از قراردادهای موجود برای این دو زاویه، محور به صورت افقی تغییر مکان نمی یابد (شکل ۳ - ۵ - ت). از معادله ۳ - ۷۱ رابطه زیر به دست می آید:

$$(\rho c^2 I(z) \vartheta(z, \omega))_{,z} + \omega^2 I(z) \rho \vartheta(z, \omega) = 0 \quad (۷۶ - ۳)$$

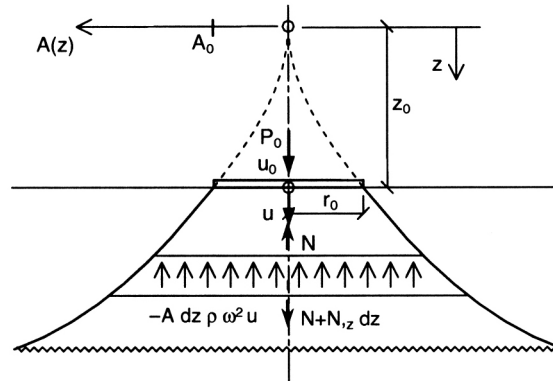
که با رابطه ۳ - ۳۷ - ب، با جایگزینی $T(z, \omega)$ با $M(z, \omega)$ (رابطه ۳ - ۵۷) متناظر است.

بنابراین، مدل نشان داده شده در شکل ۳ - ۴ با یک تیر مخروطی با تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی که مدول برشی در آن صفر است، متناظر می باشد. برای دوران دیسک حاصل از یک لنگر اعمال شده هیچ نیروی برشی و هیچ تغییر مکان جانبی به وجود نمی آید. اثر دوران سطح مقطع بر روی تغییر مکان جانبی در اثر اعوجاج برشی که از بین نمی رود، خنثی می گردد.

روابط ۳ - ۷۱ و ۳ - ۷۲ را می توان برای تأیید مخروط انتقالی برای درجه آزادی افقی نشان داده شده در شکل ۳ - ۲ - ب نیز مورد استفاده قرار داد. در معادله تعادل لنگر رابطه ۳ - ۷۱، یک عبارت اضافی نشان دهنده لنگر عکس العمل ناشی از غلتکها وجود دارد و این معادله برای تعیین لنگر عکس العمل به کار برده می شود. غلتکها رابطه $\vartheta(z, \omega) = 0$ را اعمال می نمایند. از جایگزین نمودن این رابطه در رابطه ۳ - ۷۲ داریم:

$$(\rho c_s^2 A(z) u(z, \omega))_{,z} + \omega^2 A(z) \rho u(z, \omega) = 0 \quad (۷۷ - ۳)$$

که با رابطه ۳ - ۳ - ب، با جایگزینی $N(z, \omega)$ با $V(z, \omega)$ (رابطه ۳ - ۲۹) متناظر است.



شکل ۳ - ۶ مخروط دورانی تفسیر شده به صورت مخروط انتقالی در حرکت قائم با مساحت و ممان اینرسی (قطبی) متغیر.

از نظر ظاهری فرمول بندی مخروط‌های انتقالی و دورانی را می‌توان به صورت زیر متحد نمود. مخروط با ارتفاع رأس z_0 ، عمق z و مساحت سطح $A_0 = \pi r_0^2$ برای درجه آزادی قائم در شکل ۳ - ۶ نشان داده شده است. در جهت افقی، سطح $A(z)$ به جای شعاع سطح مقطع مخروط که همواره به صورت خطی با عمق افزایش می‌یابد، ترسیم شده است. مخروط یک تغییر مکان قائم یا افقی را با دامنه $u(z, \omega)$ تجربه می‌کند که مقدار دامنه در دیسک بر روی سطح به صورت $u_0(\omega)$ بیان می‌شود. برای حرکت دورانی همان نام‌گذاری را می‌توان حفظ نمود در صورتی که A_0 به صورت ممان اینرسی سطح برای دوران و یا ممان اینرسی قطبی برای پیچش تفسیر شده و $u(z, \omega)$ ، دامنه زاویه دوران یا پیچش در نظر گرفته شود. سطح مقطع مطابق قاعده توان $A(z) = A_0 (z/z_0)^n$ که در آن z از رأس اندازه‌گیری شده، افزایش می‌یابد. مقادیر توان $n = 2$ و $n = 4$ به ترتیب با مخروط‌های انتقالی و دورانی متناظر می‌باشند. اگر c سرعت موج مناسب (سرعت موج برشی c_s برای درجات آزادی افقی و پیچشی، سرعت موج محوری c برای درجات آزادی قائم و دورانی، با سرعت موج انبساطی c_p برای حالت تراکم‌پذیر) و ρ چگالی جرم را نشان دهد، مقدار ρc^2 برابر مدول الاستیک متناظر (به ترتیب مدول برشی G و مدول مقید شده E_c برای حالت تراکم‌پذیر) می‌باشد. معادله تعادل برای حرکت هارمونیک المان بی‌نهایت کوچک (شکل ۳ - ۶) به صورت رابطه زیر است:

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۶۵

$$-N(z, \omega) + N(z, \omega) + N(z, \omega)_{,z} dz + \omega^2 A(z) \rho dz u(z, \omega) = 0 \quad (\text{الف} - ۷۸ - ۳)$$

یا

$$N(z, \omega)_{,z} + \omega^2 A(z) \rho u(z, \omega) = 0 \quad (\text{ب} - ۷۸ - ۳)$$

که در آن $N(z, \omega)$ دامنه نیرو و یا لنگر داخلی است. جایگزین نمودن رابطه نیرو - تغییر مکان

$$N(z, \omega) = \rho c^2 A(z) u(z, \omega)_{,z} \quad (۷۹ - ۳)$$

در رابطه ۳ - ۷۸ - ب به معادله دیفرانسیل حاکم حرکت می‌انجامد.

$$u(z, \omega)_{,zz} + \frac{n}{z} u(z, \omega)_{,z} + \frac{\omega^2}{c^2} u(z, \omega) = 0 \quad (۸۰ - ۳)$$

در حالت $n = ۲$ رابطه ۳ - ۸۰ با رابطه ۳ - ۵ برای مخروط انتقالی و در حالت $n = ۴$ با رابطه ۳ - ۳۹ برای مخروط دورانی مطابقت دارد.

۳ - ۴ نیم‌فضای تراکم‌ناپذیر و تقریباً تراکم‌ناپذیر

برای درجات آزادی افقی و پیچشی یک دیسک واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن که به وسیله مخروط‌ها مدل‌سازی شده، امواج k به وجود می‌آیند. بنابراین، سرعت موج مناسب، c_s است که برای تمام مقادیر نسبت پواسون ν به صورت محدود باقی می‌ماند. نسبت ظاهری z_0 / r_0 از رابطه ۳ - ۳۱ برای درجه آزادی افقی و از رابطه ۳ - ۵۵ برای درجه آزادی پیچشی برای تمام مقادیر ν تبعیت می‌کند.

برای درجات آزادی قائم و دورانی، اعوجاج محوری در مدل‌های مخروطی به وجود می‌آید. برای مقادیر کوچک ν امواج P انتشاریافته با سرعت موج انبساطی c_p وجود دارند. ν برای حالتی که به $1/2$ نزدیک شود، مدول مقید شده E_c (رابطه ۲ - ۲ - الف) و در نتیجه c_p (رابطه ۲ - ۱) به سمت بی‌نهایت متمایل می‌شود و بنابراین مدل مخروطی را نمی‌توان به‌روشنی معمول تشکیل داد. برای این حالت، ویژگی‌های مخصوص مورد نیاز است. برای ایجاد انگیزه و جزییات بیشتر خواننده به بخش‌های ۲ - ۱ - ۴ و ۲ - ۵ از مرجع [۳۷] ارجاع داده می‌شود.

بنابراین، برای درجات آزادی قائم و دورانی، روش ارائه شده به نسبت پواسون وابسته است. در محدوده تغییرات $0 \leq \nu \leq 1/3$ سرعت موج انبساطی c_p و مدول مقید شده

۶۶ تحلیل ارتعاشات پی

$E_c = \rho c_p^2$ به کار برده می‌شود. نسبت ظاهری z_0/r_0 از رابطه ۳ - ۲۸ برای درجه آزادی قائم و از رابطه ۳ - ۶۲ برای درجه آزادی دورانی، با $c = c_p$ در هر دو حالت تبعیت می‌کند. در محدوده $1/3 \leq v \leq 1/2$ به عنوان حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر، و برای $v = 1/2$ (حالت تراکم‌ناپذیر) دو ویژگی اعمال می‌گردد: نخست، سرعت موج محوری c به $2c_s$ محدود شده؛ و دوم، یک جرم محبوس برای درجه آزادی قائم و یک ممان اینرسی جرم محبوس برای درجه آزادی دورانی معرفی می‌شود.

۳-۴-۱ سرعت موج

سرعت موج محوری $c = 2c_s$ اعمال می‌گردد. مدول الاستیسیته $E = \rho c^2$ برابر است با:

$$E = 4\rho c_s^2 \quad 1/3 < v \leq 1/2 \quad (۳-۸۱)$$

نسبت‌های ظاهری برای درجات آزادی قائم و دورانی به ترتیب از روابط ۳ - ۲۸ و ۳ - ۶۲ تبعیت می‌کنند.

$$\text{قائم} \quad \frac{z_0}{r_0} = \pi(1-v) \quad 1/3 < v \leq 1/2 \quad (۳-۸۲)$$

$$\text{دورانی} \quad \frac{z_0}{r_0} = \frac{9\pi}{8}(1-v) \quad 1/3 < v \leq 1/2 \quad (۳-۸۳)$$

۳-۴-۲ جرم محبوس

در اینجا جرم خاک محبوس در زیر دیسک معرفی می‌شود که به صورت یک جسم صلب هم‌فاز با دیسک حرکت می‌کند. برای درجه آزادی قائم جرم محبوس برابر است با:

$$\Delta M = 2.4 \left(v - \frac{1}{3} \right) \rho A_0 r_0 \quad (۳-۸۴)$$

و برای درجه آزادی دورانی ممان اینرسی جرم محبوس به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

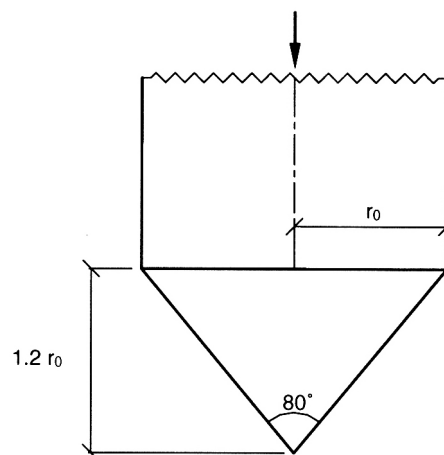
$$\Delta M_\theta = 1.2 \left(v - \frac{1}{3} \right) \rho I_0 r_0 \quad (۳-۸۵)$$

که در آن $I_0 = \pi r_0^4 / 4$. مطابق این فرمول‌ها محسوب نمودن جرم محبوس در $v = 1/3$ شروع شده و به صورت خطی با v افزایش می‌یابد. برای خاک تراکم‌ناپذیر با $v = 1/2$ ، جرم

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۶۷

محبوس در حرکت قائم با یک استوانه معادل خاک به ارتفاع $0.6r_0$ متناظر است؛ برای حرکت دورانی، استوانه معادل دارای نصف ارتفاع است (و در وسط صفحه دیسک متمرکز شده است).

اگرچه این مقادیر جرم محبوس از طریق برآزش منحنی ساده تعیین می‌گردند (ارزیابی دقت ضرایب سختی دینامیکی قائم و دورانی در بخش ۳ - ۵ را ملاحظه نمایید)، با این حال از یک توجیه فیزیکی برخوردارند. در کاربرد مهندسی مشاهده شده که شمع‌های دارای لبه ضخیم انتهایی ممکن است به سادگی شمع‌های نوک‌تیز کوبیده شوند. این به این دلیل است که خود شمع نوک‌تیز را به وجود می‌آورد (در خاک تراکم‌ناپذیر). همان‌طور که در شکل ۳ - ۷ نشان داده شده، یک مخروط خاک محبوس تشکیل شده و به صورت یک جسم صلب به همراه شمع به شعاع r_0 حرکت می‌کند. به طور حسی می‌توان انتظار داشت که زاویه بازشدگی مخروط اندکی کمتر از 90° است. برای زاویه 80° ارتفاع مخروط برابر $1.2r_0$ است. جرم مخروط برابر $0.4r_0\pi r_0^2\rho = (1/3)\pi r_0^2 1.2r_0\rho$ است که با جرم محبوس محاسبه‌شده از رابطه ۳ - ۸۴ با $v = 1/2$ مطابقت دارد. برای درجه آزادی دورانی نیز یک توضیح فیزیکی برای جرم محبوس می‌تواند بر مبنای ملاحظات مشابه تشکیل گردد.



شکل ۳ - ۷ جرم خاک محبوس تشکیل‌دهنده نوک تیز شمع در حرکت قائم.

۶۸ تحلیل ارتعاشات پی

به منظور تشکیل رابطه نیروی اندرکنش - تغییر مکان برای درجه آزادی قائم، نیروی اینرسی (حاصل ضرب جرم محبوس در شتاب اعمال شده در جهت منفی) در معادله تعادل دیسک (رابطه ۳ - ۱۳) وجود دارد.

$$P_0(\omega) = -N(z = z_0, \omega) - \Delta M \omega^2 u_0(\omega) \quad (۸۶ - ۳)$$

این عبارت اضافی به رابطه زیر می‌انجامد (رابطه ۳ - ۱۴):

$$P_0(\omega) = \left(\frac{4\rho c_s^2 A_0}{z_0} - \omega^2 \Delta M + i\omega 2\rho c_s A_0 \right) u_0(\omega) \quad (۸۷ - ۳)$$

و با داشتن روابط ۳ - ۱۷ و ۳ - ۱۸ و رابطه $\ddot{u}_0(\omega) = -\omega^2 u_0(\omega)$ خواهیم داشت:

$$P_0(\omega) = K u_0(\omega) + C \dot{u}_0(\omega) + \Delta M \ddot{u}_0(\omega) \quad (۸۸ - ۳)$$

بنابراین برای $\nu > 1/3$ یک جرم ΔM به مدل فنر - میراگر نمایش داده شده در شکل ۲ - ۲ ب اضافه می‌شود.

با داشتن فرکانس بدون بعد a_0 دیسک (رابطه ۳ - ۲۴) ضریب سختی دینامیکی

مشابه رابطه ۳ - ۲۵ به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$k(a_0) = 1 - 0.6 \left(\nu - \frac{1}{3} \right) \frac{z_0}{r_0} a_0^2 \quad (\text{الف} - ۸۹ - ۳)$$

$$c(a_0) = 0.5 \frac{z_0}{r_0} \quad (\text{ب} - ۸۹ - ۳)$$

در رابطه ۳ - ۸۹ مقدار z_0 / r_0 در رابطه ۳ - ۸۲ ارائه شده است.

رابطه لنگر خمشی اندرکنش - دوران برای درجه آزادی دورانی به طور مشابه فرمول بندی می‌شود. با وارد نمودن نیروی ممان اینرسی (حاصل ضرب ممان اینرسی جرم محبوس در شتاب دورانی اعمال شده در جهت منفی) در معادله تعادل دیسک (رابطه ۳ - ۴۳) و با جایگزینی $T(z, \omega)$ با $M(z, \omega)$ از رابطه ۳ - ۵۷ خواهیم داشت:

$$M_0(\omega) = -M(z = z_0, \omega) - \Delta M_\vartheta \omega^2 \vartheta_0(\omega) \quad (۹۰ - ۳)$$

ضریب سختی دینامیکی مشابه رابطه ۳ - ۵۰ به صورت زیر تجزیه می‌شود (رابطه ۳ - ۶۰):

$$k_\vartheta(a_0) = 1 - \frac{1}{3} \frac{a_0^2}{4(r_0/z_0)^2 + a_0^2} - 0.1 \left(\nu - \frac{1}{3} \right) \frac{z_0}{r_0} a_0^2 \quad (\text{الف} - ۹۱ - ۳)$$

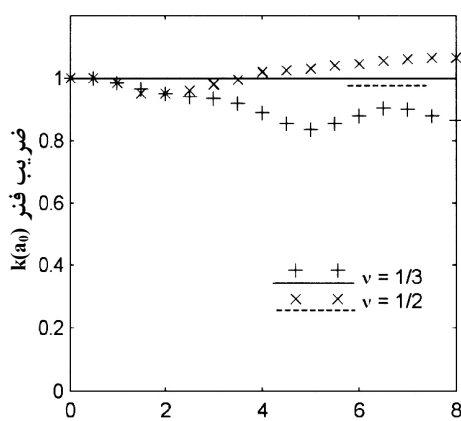
$$c_\vartheta(a_0) = \frac{1}{6} \frac{z_0}{r_0} \frac{a_0^2}{4(r_0/z_0)^2 + a_0^2} \quad (\text{ب} - ۹۱ - ۳)$$

در رابطه ۳ - ۹۱ مقدار z_0 / r_0 در رابطه ۳ - ۸۳ ارائه شده است.

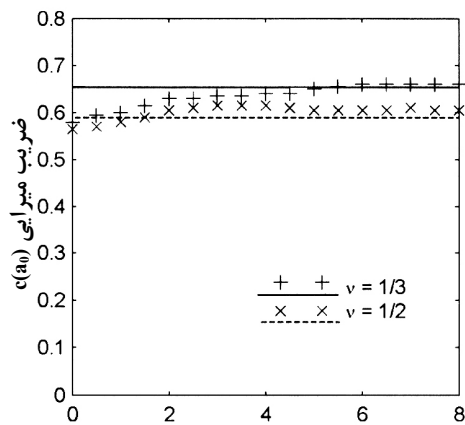
۳-۵ پی واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن

نتایج بخش‌های ۳-۱، ۳-۲ و ۳-۴ این فصل را می‌توان به طور مستقیم برای محاسبه رفتار ارتعاشی یک پی دایره‌ای واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن به کار برد. در این بخش با استفاده از مدل‌های مخروطی ضرایب سختی دینامیکی یک دیسک به شعاع r_0 واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای بدون میرایی همگن با مدول برشی G ، نسبت پواسون ν و چگالی جرم ρ برای تمام درجات آزادی محاسبه می‌شوند و با نتایج دقیق موجود در تاریخچه مهندسی مقایسه می‌گردد.

نتایج به عنوان تابعی از فرکانس بدون بعد a_0 که در رابطه ۳-۲۴ تعریف شده، ارائه گردیده‌اند. ضرایب سختی دینامیکی مشابه روابط ۳-۲۵ و ۳-۵۰ تجزیه می‌شوند. برای نتایج مدل‌های مخروطی و نتایج دقیق، پاسخ فرم بسته دقیق ضرایب سختی استاتیکی K و g به کار برده می‌شود، درست به همان صورت که در روابط ۳-۳۰، ۳-۲۷، ۳-۵۴ و ۳-۶۱ به ترتیب برای درجات آزادی افقی، قائم، پیچشی و دورانی مشخص شده است. برای درجه آزادی افقی نسبت ظاهری z_0/r_0 از رابطه ۳-۳۱ به دست می‌آید و ضرایب بدون بعد فنر و میراگر مدل مخروطی با $c = c_s$ از رابطه ۳-۲۶ حاصل می‌شود که منجر به $c = z_0/r_0$ و $k = 1$ می‌گردد. این ضرایب برای $\nu = 1/3$ و $\nu = 1/2$ به صورت خطوط افقی در شکل ۳-۸ نشان داده شده‌اند. مقادیر دقیق از مرجع [۳۵] به صورت نقاطی مشخص



فرکانس بدون بعد $a_0 = \omega r_0 / c_s$

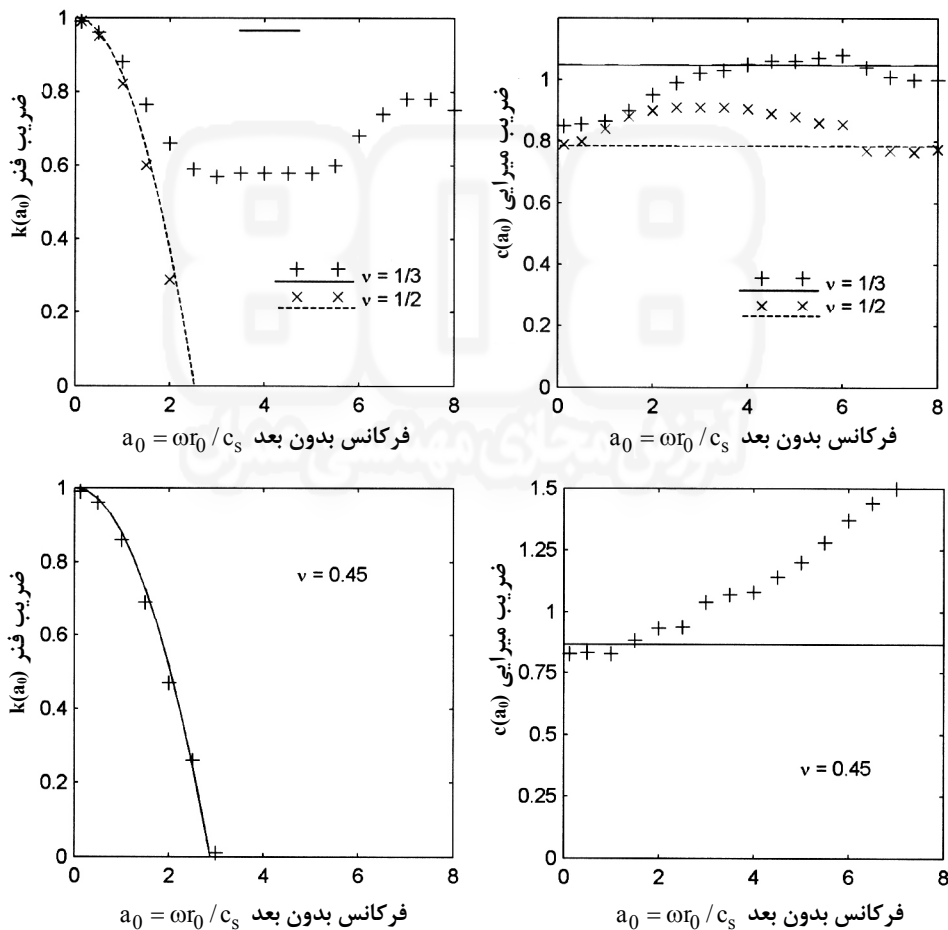


فرکانس بدون بعد $a_0 = \omega r_0 / c_s$

شکل ۳-۸ ضریب سختی دینامیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضای همگن در حرکت افقی برای نسبت‌های پواسون مختلف.

۷۰ تحلیل ارتعاشات پی

ترسیم شده‌اند. برای این دو نسبت پواسون مطابق نتایج رضایت بخش است. برای درجه آزادی قائم حالت‌های $\nu = 1/3$ ، $\nu = 0.45$ و $\nu = 1/2$ پردازش می‌شوند. برای حالت $\nu = 1/3$ با $c = c_p$ از رابطه ۳ - ۲۸ و برای $\nu = 0.45$ و $\nu = 1/2$ از رابطه ۳ - ۸۲ تبعیت می‌کند. برای حالت $\nu = 1/3$ مقادیر $k = 1$ و $c = z_0 / (2r_0)$ از رابطه ۳ - ۲۶ تعیین شده و برای حالت‌های $\nu = 0.45$ و $\nu = 1/2$ مقادیر $k(a_0)$ و $c = z_0 / (2r_0)$ از رابطه ۳ - ۸۹ تبعیت می‌کنند. نتایج مخروطی به صورت خطوط در شکل ۳ - ۹ نمایش



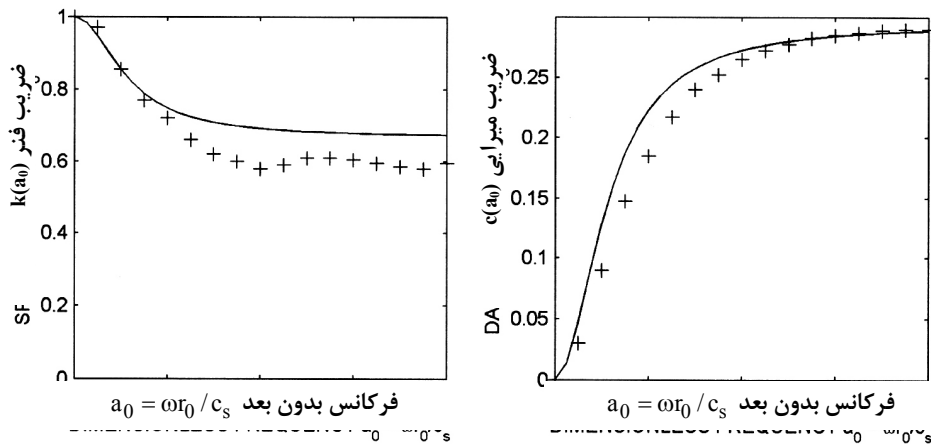
شکل ۳ - ۹ ضریب سختی دینامیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضای همگن در حرکت قائم برای نسبت‌های پواسون مختلف.

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۷۱

داده شده است. برای حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر $\nu = 0.45$ و حالت تراکم‌ناپذیر $\nu = 1/2$ ، $k(a_0)$ به وسیله یک سهمی درجه دو با تمایل رو به پایین توصیف می‌شود. نیروی اینرسی جرم محبوس ΔM به کاهش $k(a_0)$ می‌انجامد که مقادیر منفی برای مقادیر بزرگ a_0 به دست می‌آید. نتایج دقیق (نشان داده شده به صورت نقاط مشخص) از مراجع [۳۴] و [۱۵] اقتباس شده‌اند. در این موارد نیز تطابق نتایج رضایت بخش بوده و حتی برای $k(a_0)$ در حالت‌های تقریباً تراکم‌ناپذیر و تراکم‌ناپذیر عالی است.

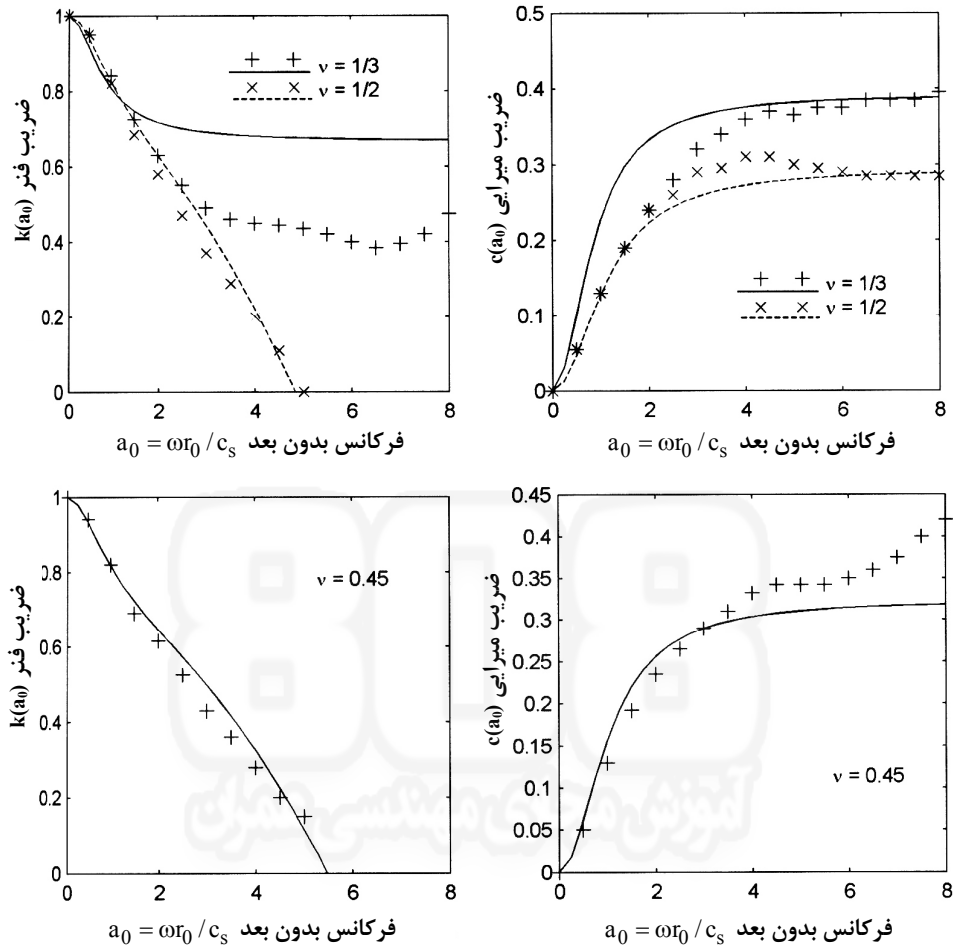
برای درجه آزادی پیچشی، $z_0 / r_0 = 0.884$ در رابطه ۳ - ۵۵ ارائه شده و $k(a_0)$ و $c(a_0)$ از رابطه ۳ - ۵۱ تعیین می‌گردد. اندیس ρ برای اختصار حذف شده است. در شکل ۳ - ۱۰ نتایج مخروطی (ترسیم شده به صورت خطوط) دارای مطابقت کاملاً مناسبی با نتایج دقیق مرجع [۳۳] هستند

در پایان، برای درجه آزادی دورانی حالت‌های $\nu = 1/3$ ، $\nu = 0.45$ و $\nu = 1/2$ محاسبه می‌شود. z_0 / r_0 برای حالت $\nu = 1/3$ با $c = c_p (=2c_s)$ از رابطه ۳ - ۶۲ تبعیت کرده و برای $\nu = 0.45$ و $\nu = 1/2$ با استفاده از رابطه ۳ - ۸۳ به دست می‌آید. برای حالت $\nu = 1/3$ مقادیر $k(a_0)$ و $c(a_0)$ از رابطه ۳ - ۶۰ تعیین شده و برای $\nu = 0.45$ و $\nu = 1/2$ مقادیر $k(a_0)$ و $c(a_0)$ از رابطه ۳ - ۹۱ تبعیت می‌کنند. در شکل ۳ - ۱۱ نتایج مخروطی (به صورت خطوط) به همراه پاسخ دقیق از مراجع [۳۵] و [۱۵] (به صورت نقاط مشخص) نمایش داده



شکل ۳ - ۱۰ ضریب سختی دینامیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضای همگن در حرکت پیچشی.

۷۲ تحلیل ارتعاشات پی



شکل ۳ - ۱۱ ضریب سختی دینامیکی دیسک واقع بر روی نیم‌فضای همگن در حرکت دورانی برای نسبت‌های پواسون مختلف.

شده‌اند. مشابه درجه آزادی قائم، $k(a_0)$ یک گرایش سهموی رو به پایین را نشان می‌دهد. در این موارد نیز تطابق بین محاسبات مخروطی و نتایج دقیق رضایت بخش بوده و برای $k(a_0)$ در حالت‌های تقریباً تراکم‌ناپذیر و تراکم‌ناپذیر عالی است.

برای درجات آزادی انتقالی، رابطه نیروی اندرکنش - تغییرمکان برای تحریک هارمونیک از رابطه ۳ - ۱۴ (رابطه ۳ - ۲۰) مدل‌سازی شده و همچنین در حوزه زمان از رابطه ۲ - ۲۴، به طور دقیق از طریق مدل فنر - میراگر که در شکل ۲ - ۲ - ب ارائه شده

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۷۳

است، مدل سازی می شود. برای درجه آزادی پیچشی رابطه لنگر اندرکنش - دوران در روابط ۳ - ۴۴ و ۳ - ۴۵ با استفاده از روابط ۳ - ۴۶ و ۳ - ۴۷ مشخص شده است. برای مخروط دورانی نیز یک مدل فنر - میراگر - جرم با ضرایب مستقل از فرکانس، اما با یک درجه آزادی داخلی اضافی ϑ_1 را می توان تشکیل داد (شکل ۳ - ۱۲). گره پی با درجه آزادی ϑ_0 به وسیله یک فنر دورانی با سختی استاتیکی K_ϑ (رابطه ۳ - ۴۶) به یک تکیه گاه صلب متصل می شود. درجه آزادی دورانی داخلی اضافی ϑ_1 ممان اینرسی جرم قطبی خود را به شکل رابطه زیر دارا می باشد:

$$M_\vartheta = \rho z_0 I_0 \quad (۳ - ۹۲)$$

(با $I_0 = \pi r_0^4 / 2$) که توسط یک میراگر دورانی با حد فرکانس بالای میرایی تابشی C_ϑ (رابطه ۳ - ۵۳) به گره پی متصل می شود. این مدل به دم میمون شباهت دارد!

برابری مدل فنر - میراگر - جرم شکل ۳ - ۱۲ با رابطه لنگر اندرکنش - دوران مخروط دورانی به صورت زیر اثبات می گردد. فرمول بندی تعادل به دو معادله حرکت در حوزه زمان می انجامد:

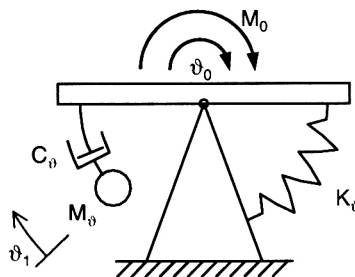
$$M_\vartheta \ddot{\vartheta}_0(t) = C_\vartheta (\dot{\vartheta}_0(t) - \dot{\vartheta}_1(t)) + K_\vartheta \vartheta_0(t) \quad (۳ - ۹۳ - الف)$$

$$M_\vartheta \ddot{\vartheta}_1(t) + C_\vartheta (\dot{\vartheta}_1(t) - \dot{\vartheta}_0(t)) = 0 \quad (۳ - ۹۳ - ب)$$

برای تحریک هارمونیک رابطه ۳ - ۹۳ به رابطه زیر تبدیل می گردد:

$$M_\vartheta \omega^2 \vartheta_0(\omega) = i\omega C_\vartheta (\vartheta_0(\omega) - \vartheta_1(\omega)) + K_\vartheta \vartheta_0(\omega) \quad (۳ - ۹۴ - الف)$$

$$- \omega^2 M_\vartheta \vartheta_1(\omega) + i\omega C_\vartheta (\vartheta_1(\omega) - \vartheta_0(\omega)) = 0 \quad (۳ - ۹۴ - ب)$$



شکل ۳ - ۱۲ مدل فنر - میراگر - جرم با درجه آزادی داخلی اضافی برای درجه آزادی دورانی.

۷۴ تحلیل ارتعاشات پی

با حذف $\vartheta_1(\omega)$ از رابطه ۳ - ۹۴ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M_0(\omega) = K_{\vartheta} \left[1 - \frac{\omega^2(M_{\vartheta}/K_{\vartheta})}{1 + \omega^2(M_{\vartheta}^2/C_{\vartheta}^2)} + i\omega \left(\frac{M_{\vartheta}}{C_{\vartheta}} \frac{\omega^2(M_{\vartheta}/K_{\vartheta})}{1 + \omega^2(M_{\vartheta}^2/C_{\vartheta}^2)} \right) \right] \vartheta_0(\omega) \quad (۳ - ۹۵)$$

از روابط ۳ - ۴۶، ۳ - ۵۳، ۳ - ۹۲ و ۳ - ۴۸ رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\omega^2 \frac{M_{\vartheta}}{K_{\vartheta}} = \frac{1}{3} b_0^2 \quad (۳ - ۹۶ - الف)$$

$$\omega \frac{M_{\vartheta}}{C_{\vartheta}} = b_0 \quad (۳ - ۹۶ - ب)$$

از جایگزینی رابطه ۳ - ۹۶ در رابطه ۳ - ۹۵ رابطه لنگر اندرکنش - دوران مخروط دورانی برای درجه آزادی پیچشی، با ضریب سختی دینامیکی آن مطابق رابطه ۳ - ۴۵، با استفاده از رابطه ۳ - ۴۷ به دست می‌آید.

جدول ۳-۱ مدل مخروط و مدل فنر - میراگر - جرم برای پی واقع بر روی سطح نیم‌فضای همگن

نوع حرکت	افقی	قائم	دورانی	پیچشی
شعاع معادل r_0	$\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{4I_0}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{4I_0}{\pi}}$
نسبت ظاهری $\frac{z_0}{r_0}$	$\frac{\pi}{8}(2 - \nu)$	$\frac{\pi}{4}(1 - \nu) \left(\frac{c}{c_s}\right)^2$	$\frac{9\pi}{32}(1 - \nu) \left(\frac{c}{c_s}\right)^2$	$\frac{9\pi}{32}$
نسبت پواسون ν	تمام مقادیر ν	$\frac{1}{3} < \nu \leq \frac{1}{2}$ $\nu \leq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < \nu \leq \frac{1}{2}$ $\nu \leq \frac{1}{3}$	تمام مقادیر ν
سرعت موج c	c_s	c_p $2c_s$	c_p $2c_s$	c_s $2c_s$
جرم محبوس ΔM ΔM_{ϑ}	0	$2.4 \left(\nu - \frac{1}{3}\right) \rho A_0 r_0$	0	$1.2 \left(\nu - \frac{1}{3}\right) \rho I_0 r_0$
مدل پارامتر متمرکز		$K = \rho c^2 A_0 / z_0$ $C = \rho c A_0$	$K_{\vartheta} = 3\rho c^2 I_0 / z_0$ $C_{\vartheta} = \rho c I_0$ $M_{\vartheta} = \rho I_0 z_0$	

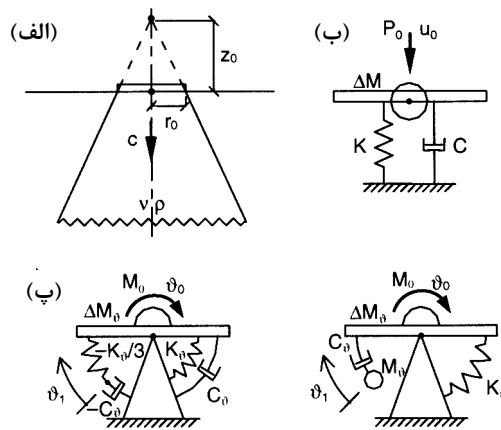
۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۷۵

معادلات حرکت مشخص شده در رابطه ۳ - ۹۳ را می‌توان به طور مستقیم برای تحلیل اندرکنش دینامیکی خاک و سازه در حوزه زمان به کار برد. در یک کاربرد عملی، مدل فنر - میراگر - جرم با یک درجه آزادی داخلی نشان داده شده در شکل ۳ - ۱۲ را می‌توان به عنوان یک نمایش دقیق از مخروط دورانی در یک تحلیل اندرکنش دینامیکی خاک و سازه به سطح زیرین سازه متصل نمود. سپس می‌توان سیستم کوپل کامل را به طور مستقیم با استفاده از یک برنامه کامپیوتری همه‌منظوره تحلیل نمود.

همچنین مدل نشان داده شده در شکل ۳ - ۱۲ را می‌توان به منظور نمایش مخروط دورانی برای حالت تراکم‌پذیر به کار برد ($v \leq 1/3$). I_0 در رابطه ۳ - ۹۲ ممان اینرسی ($= \pi r_0^4 / 4$) را نمایش می‌دهد. برای خاک تقریباً تراکم‌ناپذیر و تراکم‌ناپذیر ($1/3 \leq v \leq 1/2$) ممان اینرسی جرم با ضریب $\Delta M g$ (رابطه ۳، ۸۵) در گره پی با درجه آزادی \mathcal{G}_0 معرفی می‌شود.

در تحلیل اندرکنش دینامیکی خاک و سازه ساده‌ترین راه برای در نظر گرفتن جرم محبوس ΔM و ممان اینرسی جرم محبوس $\Delta M g$ ، تخصیص دادن آنها به سطح زیرین سازه است.

جدول ۳ - ۱ اطلاعات مدل‌سازی برای یک پی واقع بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن را به طور خلاصه بیان می‌نماید. برای تمام مؤلفه‌های حرکت، یک پی بدون جرم صلب با مساحت A_0 و ممان اینرسی (قطبی) I_0 بر روی سطح یک نیم‌فضای همگن با نسبت پواسون ν ، سرعت موج برشی c_s ، سرعت موج انبساطی c_p و چگالی جرم ρ را می‌توان به وسیله یک مخروط به شعاع معادل r_0 (تعیین شده از طریق معادل نمودن A_0 یا I_0 پی با شکل عمومی با مقادیر مربوط به یک دیسک معادل)، ارتفاع رأس z_0 و سرعت موج c مدل‌سازی نمود (شکل ۳ - ۱۳ - الف). مدل مخروط انتقالی برای تغییر مکان u_0 به صورت دینامیکی معادل سیستم فنر K و میراگر C است (شکل ۳ - ۱۳ - ب). مخروط دورانی برای دوران \mathcal{G}_0 به طور دقیق با مدل فنر $K g$ میراگر $C g$ و ممان اینرسی جرم $M g$ با یک درجه آزادی داخلی \mathcal{G}_1 (که در سمت راست شکل ۳ - ۱۳ - پ نشان داده شده است)، متناظر می‌باشد. به عنوان یک امکان دیگر، مدل فنر $K g$ و میراگر $C g$ با یک درجه آزادی داخلی \mathcal{G}_1 را (که در سمت چپ شکل ۳ - ۱۳ - پ نشان داده شده است) می‌توان مورد



شکل ۳-۱۳ مدل مخروط و مدل‌های پارامتر متمرکز متناظر برای پی واقع بر روی سطح نیم‌فضای همگن. الف) مخروط نیمه‌نامحدود ناقص؛ ب) مدل فنر - میراگر - جرم برای درجه آزادی انتقالی؛ پ) مدل فنر - میراگر - جرم برای درجه آزادی دورانی.

استفاده قرار داد. دقت نمایید که در این حالت دو ضریب از ضرایب منفی هستند که از نظر ریاضی مشکلی وجود ندارد، اگرچه به صورت مکانیکی نمی‌توان مدل را تشکیل داد. تمام ضرایب به صورت مستقل از فرکانس‌اند. برای حرکت‌های قائم و دورانی در حالت خاک تقریباً تراکم‌ناپذیر و تراکم‌ناپذیر $(1/3 \leq \nu \leq 1/2)$ ، c به $2c_s$ محدود شده و یک جرم محبوس ΔM و یک ممان اینرسی جرم محبوس $\Delta M \vartheta$ که به گره پی تخصیص یافته، ظاهر می‌شود.

۳-۶ مخروط‌های دوبل

در این بخش یک دیسک مدفون در یک فضای کامل مورد بررسی قرار می‌گیرد. درجه آزادی دورانی به صورت یک مثال در شکل ۳-۱۴ - الف نمایش داده شده است. بر روی یک دیسک مدفون به شعاع r_0 واقع در یک فضای کامل با نسبت پواسون ν ، سرعت موج c برای $c = c_p$ ، $\nu \leq 1/3$ ، و چگالی جرم ρ ، یک لنگر با دامنه $M_0(\omega)$ عمل نموده که به یک دوران با دامنه $\vartheta_0(\omega)$ می‌انجامد. درجه آزادی قائم نیز در

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۷۷

شکل ۲ - ۱۰ - ب نمایش داده شده است. این وضعیت (اولین بلوک سازنده مورد استفاده در تحلیل یک پی مدفون) به صورت یک مخروط دابل مدل سازی می شود. بنابراین، دو مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون وجود دارد. هر مخروط (یک طرفه) منفرد با در نظر گرفتن یک دیسک واقع بر روی نیم فضای همگن تشکیل می شود. مشخصات، به ویژه در جدول ۳ - ۱ به طور خلاصه بیان شده است. نیمی از لنگر اعمال شده به وسیله هر یک از مخروط های منفرد تحمل می شود. رابطه لنگر اندرکنش - دوران دیسک مدفون (رابطه ۳ - ۴۴) برابر است با:

$$M_0(\omega) = S_{\theta}(a_0)\vartheta_0(\omega) \quad (۳ - ۹۷)$$

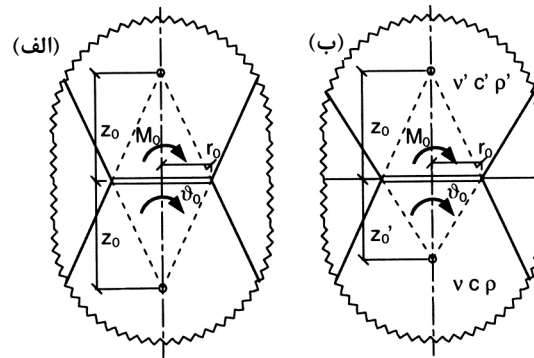
که در آن ضریب سختی دینامیکی برای مدل مخروط دابل (رابطه ۳ - ۵۰) به صورت زیر می باشد:

$$S_{\theta}(a_0) = 2K_{\theta}[k_{\theta}(a_0) + ia_0 c_{\theta}(a_0)] \quad (۳ - ۹۸)$$

که ضریب سختی استاتیکی مخروط منفرد K_{θ} مطابق رابطه ۳ - ۵۸ بوده و ضرایب بدون بعد فنر و میراگر $k_{\theta}(a_0)$ و $c_{\theta}(a_0)$ از رابطه ۳ - ۶۰ برای $v \leq 1/3$ و از رابطه ۳ - ۹۱ برای $1/3 < v \leq 1/2$ تعیین می شوند. بنابراین، تنها اصلاح برای تعیین ضریب سختی استاتیکی مخروط دابل، ضرب کردن ضریب سختی استاتیکی مخروط منفرد در ۲ می باشد. هنگامی که فضای کامل از دو نیم فضا (یک نیم فضای پایین تر با مشخصات v ، c و ρ و یک نیم فضای بالاتر با مشخصات متناظر v' ، c' و ρ') تشکیل می شود که با یکدیگر بر روی سطوح «آزاد» خود در تماس بوده و دیسک در این سطح مشترک واقع شده، مفهوم مخروط دابل همچنان برای هر مخروط منفرد با مشخصات نیم فضای متناظر صادق است. درجه آزادی دورانی در شکل ۳ - ۱۴ - ب نمایش داده شده است. به این ترتیب ضریب سختی دینامیکی مدل مخروط دابل برابر است با:

$$S_{\theta}(a_0) = K_{\theta}[k_{\theta}(a_0) + ia_0 c_{\theta}(a_0)] + K'_{\theta}[k'_{\theta}(a'_0) + ia'_0 c'_{\theta}(a'_0)] \quad (۳ - ۹۹)$$

که عبارت دوم در سمت راست با همان معادلات تعیین شده در بالا اما با استفاده از مشخصات مصالح نیم فضای بالاتر (مشخص شده با یک پریم) محاسبه می شود. درجه آزادی قائم نیز در شکل ۲ - ۱۰ - پ نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۴ مدل مخروطی دوپل. الف) دیسک مدفون در نیم‌فضای همگن؛ ب) دیسک مدفون در سطح مشترک دو نیم‌فضای همگن تشکیل دهنده یک فضای کامل.

روش بیان شده برای درجه آزادی پیچشی و درجات آزادی انتقالی به صورت مشابه می‌باشد. برای یک دیسک مدفون در یک فضای کامل همگن تنها اصلاح شامل ضرب کردن ضریب سختی استاتیکی K مخروط منفرد در ۲ می‌باشد. برای یک دیسک مدفون در سطح مشترک بین دو نیم‌فضا با مشخصات مصالح متفاوت رابطه ۳-۹۹ با حذف اندیس ϑ همچنان برای درجات آزادی انتقالی صادق است.

به جای تعیین نسبت ظاهری مخروط منفرد با استفاده از ضریب سختی دینامیکی یک دیسک واقع بر روی یک نیم‌فضای همگن (جدول ۳-۱)، ضریب سختی استاتیکی دقیق یک دیسک مدفون در یک فضای کامل همگن که در شکل بسته وجود دارد، می‌تواند به‌عنوان یک جایگزین مورد استفاده قرار گیرد. این ضریب برای درجه آزادی دورانی برابر است با:

$$K_{\vartheta exact} = \frac{64(1-\nu)}{3(3-4\nu)} Gr_0^3 \quad (3-100)$$

از مطابقت دادن رابطه ۳-۱۰۰ با ضریب سختی استاتیکی مدل مخروطی دوپل (رابطه ۳-۵۸) به صورت زیر،

$$K_{\vartheta} = 2 \frac{3\rho c^2 \pi r_0^4}{z_0} \frac{1}{4} \quad (3-101)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{9\pi}{128} \frac{3-4\nu}{1-\nu} \frac{c^2}{c_s^2} \quad (\text{دورانی}) \quad (3-102)$$

۳. مخروط اولیه با انتشار موج به سمت بیرون ۷۹

به طور مشابه برای درجه آزادی قائم،

$$K_{exact} = \frac{32(1-\nu)}{3-4\nu} Gr_0 \quad (۱۰۳ - ۳)$$

رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{16} \frac{3-4\nu}{1-\nu} \frac{c^2}{c_s^2} \quad (\text{قائم}) \quad (۱۰۴ - ۳)$$

و برای درجه آزادی افقی،

$$K_{exact} = \frac{64(1-\nu)}{7-8\nu} Gr_0 \quad (۱۰۵ - ۳)$$

رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{32} \frac{7-8\nu}{1-\nu} \quad (\text{افقی}) \quad (۱۰۶ - ۳)$$

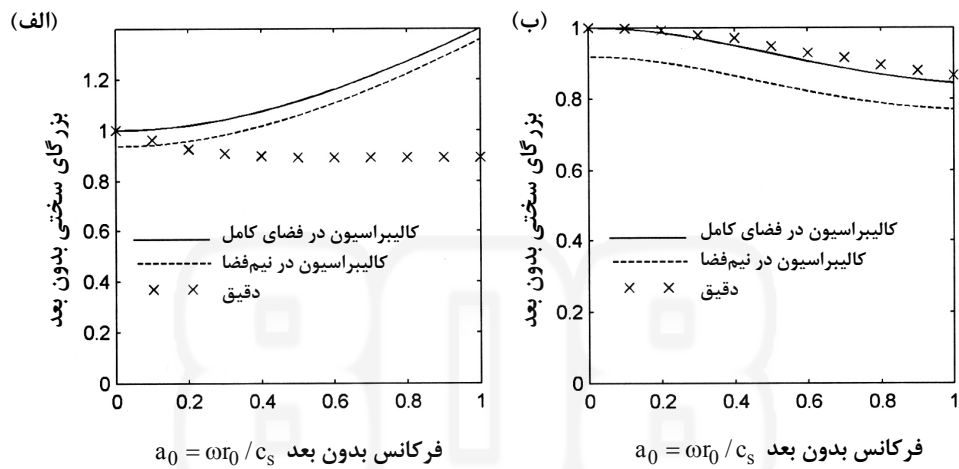
برای درجه آزادی پیچشی هیچ تغییری به وجود نمی‌آید، یعنی ضریب سختی استاتیکی دقیق یک دیسک واقع بر روی یک نیم‌فضا برابر نصف ضریب سختی استاتیکی دقیق یک دیسک مدفون در یک فضای کامل است.

تمام اطلاعات دیگر در ارتباط با تشکیل مدل مخروط (یک‌طرفه) منفرد که در جدول ۳ - ۱ ارائه شده، همچنان صادق است. برای حالت تراکم ناپذیر ($\nu = 1/2$)، هر دو روش کالیبراسیون به نسبت ظاهری یکسان می‌انجامد.

تأثیر روش کالیبراسیون بر روی بزرگای ضریب سختی دینامیکی در شکل ۳ - ۱۵ نمایش داده شده است. یک دیسک مدفون در یک فضای کامل همگن در نظر گرفته می‌شود. در هر مورد، بزرگای ضریب سختی دینامیکی (رابطه ۱ - ۶) با تقسیم بر ضریب سختی استاتیکی دقیق دیسک مدفون برای درجه آزادی مورد نظر نرمالیزه می‌شود. برای درجه آزادی قائم، نسبت پواسون به صورت 1/3 انتخاب می‌شود که مقایسه مستقیم با نتایج دقیق از مرجع [۲۹] را ممکن می‌سازد. سختی‌های دینامیکی برای دو کالیبراسیون به صورت خطوط پیوسته در شکل ۳ - ۱۵ - الف ترسیم شده، در حالی که نتایج «دقیق» به صورت نقطه‌چین نمایش داده شده‌اند. در حالت درجه آزادی قائم کاربرد روش کالیبراسیون فضای کامل، به جز یک محدوده فرکانسی بسیار کوچک، به بهبود قابل توجهی منجر نمی‌شود.

۸۰ تحلیل ارتعاشات پی

برای درجه آزادی دورانی نسبت پواسون به صورت $0/3$ انتخاب شده که امکان مقایسه با مرجع [۳۰] را فراهم می‌سازد. نتایج در شکل ۳ - ۱۵ - ب ترسیم شده است. در این حالت کاربرد روش کالیبراسیون فضای کامل تطابق بین سختی دینامیکی محاسبه شده و مقادیر دقیق را به میزان قابل توجهی بهبود می‌بخشد.



شکل ۳ - ۱۵ بزرگی سختی دینامیکی دیسک مدفون در فضای کامل همگن - اثر روش کالیبراسیون. (الف) درجه آزادی قائم، $v=1/3$ ؛ (ب) درجه آزادی دورانی، $v=0.3$.