روش های تعیین پریود ارتعاش طبیعی سازه با استفاده از روابط تحلیلی

(مقایسه روش های RAYLEIGH RITZ و EIGENVALUE)

مجتبی اصغری سرخی

mojtaba808@yahoo.com

پریود ارتعاشی T در واقع بیان کننده خصوصیات فیزیکی و رفتاری سیستم در مقابل حرکت دینامیکی می باشد و چون رابطه معکوس با سختی دارد، پس بیان دیگری از سختی است. قبل از هر چیز لازم به یادآوریست که تعیین پریود ارتعاشی سیستم T_n تابع تعیین فرکانس ارتعاشی سازه ω_n است چراکه :

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

روش های محاسبه پریود ارتعاشی سازه:

۱- روش های تحلیلی

۱-۱- حل مساله مقدار ویژه Eigenvalue

تعیین مشخصه های ارتعاشی شامل فرکانس ها و مودهای طبیعی یک سازه نیاز به حل ماتریس مساله مقدار ویژه دارد. از علم دینامیک سازه ها می دانیم که ارتعاش آزاد یک سیستم نامیرا به زبان ساده به شکل ریاضی زیر قابل بیان است:

$$u(t) = q_n(t)\phi_n$$

که در رابطه فوق ϕ_n تابع شکل مود n ام بوده و منحنی تغییرشکل آن مود را نشان می دهد و تابع زمان نیست. $q_n(t)$ را مختصه زمانی و یا به طور خلاصه مختصه مود n ام می گویند که تابع زمان است.تغییرات زمانی تغییرشکل یا مختصه مودی، با تابع هارمونیک ساده زیر تعریف می شود:

$$q_n(t) = A_n Cos\,\omega_n t + B_n Sin\,\omega_n t$$

که A_n, B_n ثابت های انتگرال گیری می باشند که از شرایط اولیه قابل تعیین است.با ترکیب دو رابطه بالا رابطه زیر حاصل می شود که در آن ω_n, ϕ_n مجهول می باشند:

$$u(t) = \phi_n (A_n Cos\,\omega_n t + B_n Sin\,\omega_n t)$$

در سازه ها که از نوع سیستم های میرا به حساب می آیند معادله حاکم بر ارتعاش آزاد سیستم از رابطه زیر تعیین می شود:

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0$$

که M , K ماتریس های سختی و جرم سازه و C ماتریس میرایی میباشد. بر حسب توزیع میرایی در سازه ماتریس مربع C می تواند قطری یا غیر قطری باشد.اگر C قطری باشد رابطه بالا معادله دیفرانسیل غیر همبسته را برای مختصه های مودی بدست می دهد و مدل های تحلیل کلاسیک برای حل این سیستم ها قابل استفاده هستند. مود های ارتعاشی چنین سیستمی مشابه مودهای سیستم نامیراست. و اگر C غیرقطری باشد استفاده از تحلیل های کلاسیک برای حل این سیستم ها ممکن نیست و مودهای ارتعاشی طبیعی آنها مشابه سیستم های نامیرا نمی باشد.

برای حل معاله نیاز به قراردادن مقدار $u(t)$ در $M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0$ میباشد.اگر فعلا از میرایی C صرفنظر کنیم ادغام دو رابطه فوق رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\left[-\omega_n^2 m\,\phi_n+k\,\phi_n\right]q_n(t)=0$$

حالتی که عبارت داخل پرانتز مساوی صفر است منجر به معادله جبری زیر می شود:

$$k\,\phi_n=\omega_n^2 m\,\phi_n \rightarrow k\,\phi_n=\lambda m\,\phi_n$$

این رابطه یک مساله مقدار ویژه ماتریسی نامیده می شود که $\lambda=\omega_n^2$ مقدار ویژه و ϕ_n بردار ویژه مرتبط با آن نامیده می شود. و برای حل آن نیاز است دترمینان زیر از طریق روش های کلاسیک حل شود:

$$p(\lambda)=\det(k-\lambda m)=0$$

$p(\lambda)$ یک چند جمله ای از درجه **N** یعنی تعداد درجات آزادی سیستم است.با افزایش تعداد درجات آزادی ، برای بسط دترمینان و حل چند جمله ای $p(\lambda)$ نیاز به روش های خاص است. تمام روش های حل مسئله مقدار ویژه، باید دارای طبیعت تکرار باشند، زیرا اصولا حل یک مسئله مقادیر ویژه معادل تعیین ریشه های چند جمله ای $p(\lambda)$ میباشد.در صورتی که درجه یک چند جمله ای بزرگتر از ۴ باشد، روش صریحی برای حل آن وجود ندارد و استفاده از روش های تکرار اجباری است.

۱-۲- رابطه رایلی RAYLEIGH METHOD

روش رایلی روشی ساده شده جهت تعیین فرکانس ارتعاشی سازده است.رابطه رایلی (خارج قسمت رایلی) را می توان از تقسیم حداکثر انرژی جنبشی به حداکثر انرژی پتانسیل سیستمی با ارتعاش هارمونیک ساده با فرکانس ω و منحنی تغییر شکل ϕ تعیین نمود.به طور خلاصه برای سیستم های پیوسته و گسسته از روابط زیر استفاده می شود: ($T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$)

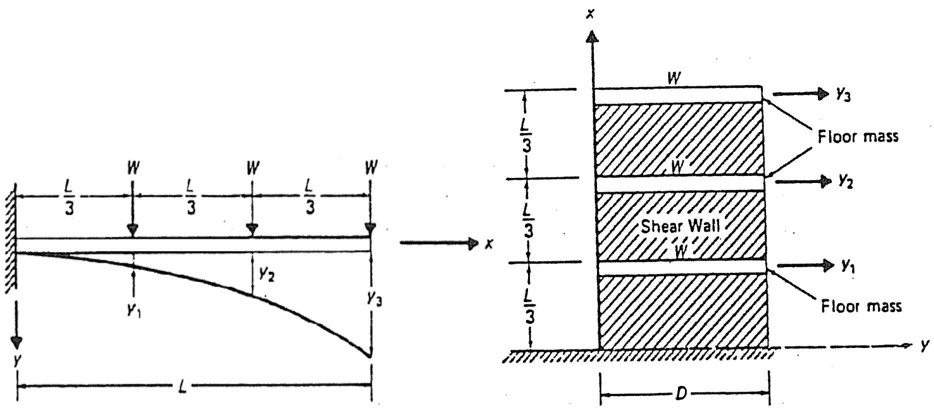
- سیستمها با جرم پیوسته

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\int EI\,(\frac{d^2y}{dx^2})dx}{\int my^2dx}}$$

- سیستمها با جرم گسسته

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2}{\sum_{i=1}^{N} F_i u_i}}$$

استفاده از این روش برای سیستم هاییست که فرض تمرکز جرم در طبقات برای آنها صادق باشد برای مثال شکل زیر:



سازه های مختلف ، در هنگام اعمال یک بار دینامیکی بینهایت درجه آزادی دارند. روش های اجزاء محدود، این سیستم با درجات آزادی نامحدود را به مدلی با تعداد درجات آزادی محدود که رفتار فیزیکی مشابهی دارند تبدیل می کند. با استفاده از روش آنالیز مودال این تعداد درجه آزادی به تعداد محدودتری در مختصات مودال تبدیل می شود. البته جواب حاصل از سیستم انتقال یافته اجزاء محدود هنگامی به جواب واقعی میل می کند که تعداد مودهای در نظر گرفته شده افزایش یابد.

۱-۳- روش رایلی ریتز **RAYLEIGH-RITZ METHOD**

اگرچه رابطه خارج قسمت رایلی می تواند تقریب رضایت بخشی از اولین مد ارتعاشی در اکثر سازه ها ارائه دهد اما این ضروریست که آنالیز دینامیکی بیش از یک مد را لحاظ کند تا بتواند دقت مناسبی از نتایج ارائه دهد. بسط ریتز از رابطه رایلی یکی از روش های مناسب برای تخمین چند مد اول از ارتعاش است. فرض اساسی در روش ریتز اینست که بردار تغییر مکان را بتوان تابعی از مد شکل های فرضی بکار برد:[1]

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\psi}\, Z(t) = \boldsymbol{\psi}\, Z_0 \sin \omega t \qquad (14\text{-}5a)$$

in which $\boldsymbol{\psi}$ is the assumed shape vector and $Z(t)$ is the generalized coordinate expressing its amplitude. The velocity vector in free vibrations then is

Equating these then leads to the frequency expression

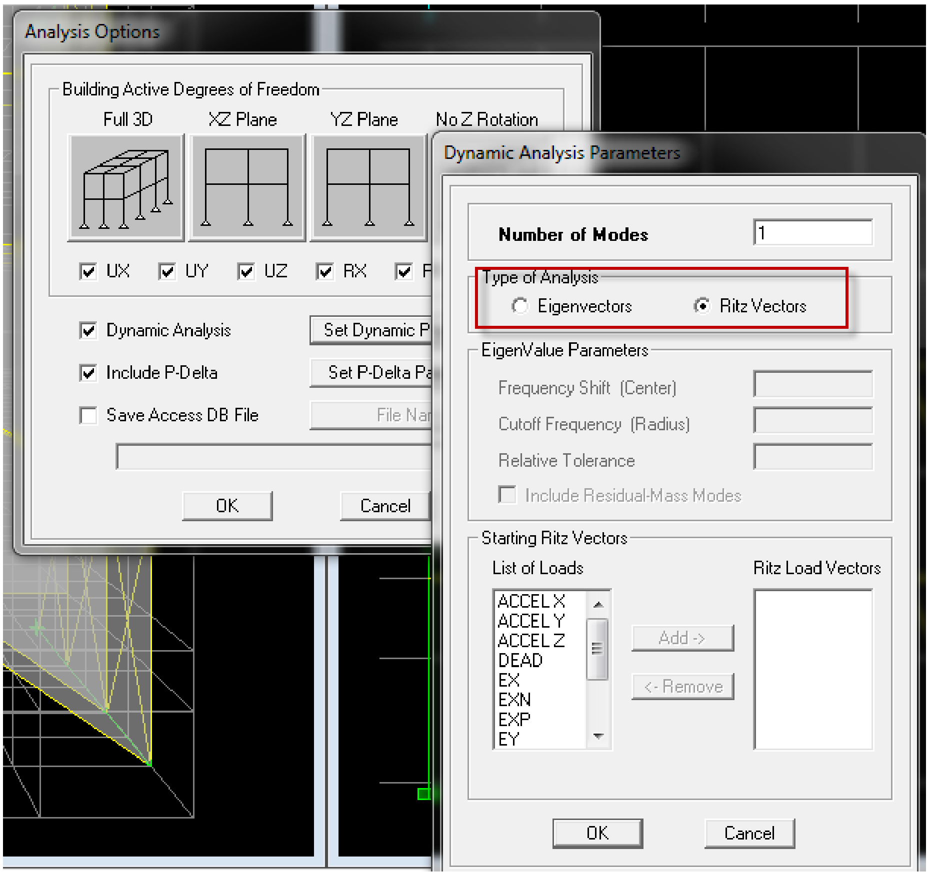
$$\omega^2 = \frac{\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z}}{\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z}} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{Z})}{\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{Z})} \qquad (14\text{-}16)$$

مهمترین بخش انجام تحلیل دینامیکی بر اساس زیر فضاهای تعمیم یافته، نحوه انتخاب و خصوصیات بردارهای پایه مولد زیر فضای مورد نظر می باشد.انتخاب بردارهای پایه مناسب به معنای حدس و تخمین مناسب پاسخ مورد انتظار سیستم می باشد.بردارهای ویژه و بردارهای ریتز-ویلسون دو دسته اصلی بردارهای پایه به حساب می آیند.بردارهای ویژه به علت هزینه بالای محاسباتی و عدم در نظر گرفتن عامل بارگذاری بهترین انتخاب نیستند.لذا از بردارهای ریتز که متاثر از توزیع مکانی بارگذاری خارجی و محتوای فرکانسی غالب بارگذاری میباشند استفاده می شود. در روش ریتز تعداد معادلات نسبت به روش بردارهای ویژه کمتر است که باعث کاهش حجم عملیاتی می شود..[4]

در روش ریتز اثر بارگذاری دینامیکی در تحلیل دیده می شود در حالیکه در روش مقدار ویژه در حل معادله $p(\lambda) = \det(k - \lambda m) = 0$ اثر بارگذاری دیده نمی شود. برای همین است که در نرم افزار برای انجام تحلیل ریتز حتما میبایست یک یا چند بردار بارگذاری دینامیکی را تعریف کنیم. تحلیل ریتز بخصوص در سازه های بلند نامتقارن یا با جرم متمرکز در بام (برای مثال وجود استخر یا برج آنتن) در بام بحرانی می باشد.

روش های تحلیلی تعیین پریود ارتعاشی سازه در نرم افزار های CSI

در حال حاضر در نرم افزار های SAP , ETABS مطابق شکل زیر در پنجره Analysis Option با انتخاب گزینه Set Dynamic Parameters از هر دو روش مقدار ویژه و ریتز جهت تعیین پریود ارتعاشی سازه می توان استفاده کرد:



در حال حاضر روش پیشفرض تعیین پریود ارتعاشی سازه در نرم افزار های CSI روش مقدار ویژه Eigenvalue میباشد. اما به جهت برتری های روش ریتز بهتر است از این روش جهت تعیین پریود ارتعاشی سازه استفاده شود آنالیز ریتز مد هایی را که اساسا نسبت وسیعی از توزیع جرم سازه را شامل می شوند را در نظر می گیرد و همه مد ها تحت تاثیر برش پایه قرار دارند.[3] .

حل مقادیر ویژه برای یک سازه بزرگ پرهزینه ترین بخش یک آنالیز دینامیکی است. لذا از بردارهای ریتز جهت کاهش بعد این مساله استفاده می شود.

۲- **روش های تجربی** برای مثال آیین نامه ASCE 7-05

$$T = 1.0\, C_t h_n^{0.75}, \quad \text{for the serviceability limit state,}$$
$$T = 1.25\, C_t h_n^{0.75}, \quad \text{for the ultimate limit state,}$$

مقدار C_t:

- 0.08 قابهای خمشی فولادی
- 0.08 قابهای خمشی فولادی
- 0.05 سایر سیستمها ....

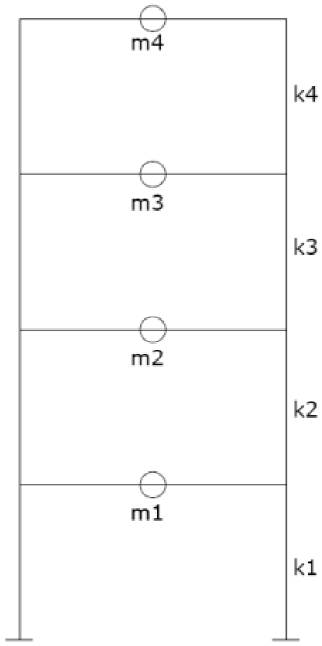
مطابق تبصره ای از استاندارد۲۸۰۰ : در صورت کمتر بودن پریود تجربی از ۱.۲۵ برابر پریود تحلیلی میبایست پریود تحلیلی را ملاک آنالیز قرار داد.

مراجع:

1-Dynamics of Structure 3rd Ed- Clough Penzien
2-Dynamics of Structures Chopra Theory and Applications to Earthquake Engineering-Anil K Chopra
3-CSI Programs manual & Ashraf Habibullah Lecture video " The Advantage of a Ritz Analysis over an Eigen Analysis in Dynamics ",2010
۴- زهرا پاچناری،رضا عطارنژاد " بهبود الگوریتم ریتز اصلاح شده " ،مجله عمران شریف سال نوزدهم شماره سی و هفتم صفحه ۴-۱۱) ، تابستان ۸۷
۵- جزوه و تمرینات درس طراحی سازه ها در برابر زلزله مدرس جناب دکتر سعید شجاعی-اردیبهشت ۸۸، دانشگاه شهید باهنر کرمان

در ادامه دو مثال از نحوه تعیین مقادیر ویژه و بردار های ویژه ونیز روش رایلی در تعیین فرکانس ارتعاشی سازه آورده خواهد شد.

دوره تناوب طبیعی ارتعاش در قاب زیر رادر سه حالت الف ، ب و ج با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوت ان را توجیه کنید.



الف: $m_1=m_2=m_3=m_4$

ب: $m_1=2m_2=4m_3=8m_4$

ج: $8m_1=4m_2=2m_3=m_4$

$k_1=2k_2=4k_3=8k_4$

در ابتدا ماتریس جرم و سختی را برای درجات آزادی مورد نظر به دست آورده و سپس با حل مسئله مقدار ویژه فرکانس و مودهای طبیعی سازه را به دست می آوریم.

الف: $m_1=m_2=m_3=m_4$

ماتریس جرم

$$M = m\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} = k_4\begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K-\omega_n^2 m]\phi_n = 0$$

$$det[K-\omega_n^2 m] = 0$$

$$\det\left(k_4\begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega_n^2 m_4\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$x = \frac{\omega_n^2 m_4}{k_4}$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$64 - 208x + 126x^2 - 22x^3 + x^4 = 0$$

$$x = 0.3964 \Longrightarrow \omega_n = 0.63\sqrt{\frac{k_4}{m_4}}\ rad/sec$$

ب: $m_1=2m_2=4m_3=8m_4$

$$M = m_4\begin{bmatrix} 8 & & & \\ & 4 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$64 - 392x + 624x^2 - 352x^3 + 64x^4 = 0$$

$$x = 0.248 \Longrightarrow \omega_n = 0.4979\sqrt{\frac{k_4}{m_4}}\ rad/sec$$

ج: $8m_1=4m_2=2m_3=m_4$

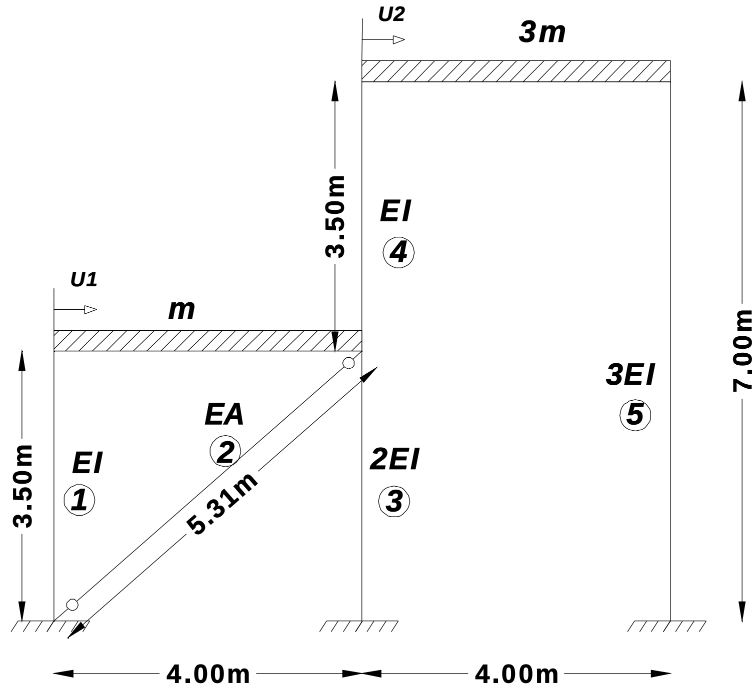
$$M = m_4\begin{bmatrix} 0.125 & & & \\ & 0.25 & & \\ & & 0.5 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$64 - 155x + \frac{651}{16}x^2 - \frac{127}{64}x^3 + \frac{1}{64}x^4 = 0$$

$$x = 0.0047 \Longrightarrow \omega_n = 0.068\sqrt{\frac{k_4}{m_4}}\ rad/sec$$

فرکانس این سازه را محاسبه کنید:

$M=100\ ton \qquad E=2E6\ kg/cm^2 \qquad I=1000\ cm^4 \qquad A=30\ cm^2$



در ابتدا ماتریس جرم و سختی را برای درجات آزادی مورد نظر به دست آورده و سپس با حل مسئله مقدار ویژه فرکانس و مودهای طبیعی سازه را به دست می آوریم.

ماتریس جرم

$$M = m\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = 10^5\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی

$$k_a = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12\times 2\times 10^6\times 10^3}{350^2} = 559.76\ kg/cm$$

$$k_b = \frac{EA}{L}\cos^2 a = \frac{30\times 2\times 10^6}{350}\left(\frac{4}{5.3}\right)^2 = 9764.53\ kg/cm$$

$$K = \begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4 & -k_4\\ -k_4 & k_4+k_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4k_a+k_b & -k_a\\ -k_a & {}^{11}/_{8}\,k_a\end{bmatrix} =$$

$$K = \begin{bmatrix} 12003.57 & -559.76 \\ -559.76 & 769.67 \end{bmatrix}$$

$$[K - \omega_n^2 m]\phi_n = 0$$

$$det[K - \omega_n^2 m] = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 12003.57 & -559.76 \\ -559.76 & 769.67 \end{bmatrix} - \omega_n^2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\omega_n^2 = 0.0025 \Longrightarrow \omega_n = 0.05\, rad/sec$$

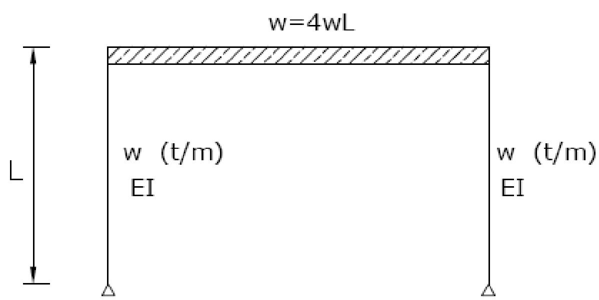
سوال ۱۲:

در قاب زیر ستون ها به شالوده به صورت مفصلی متصل اند. تیر صلب فرض میشود. وزن هر متر طول ستون W و وزن کل تیر 4WL می باشد. دوره تناوب طبیعی ارتعاش قاب را به 2 روش زیر بدست آورید.

1: روش ریلی   2: روش S.W

$$1:\ y = p_x \frac{(3L^2 - x^2)}{12EI}$$

$$2:\ y = w\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 L}{2} + \frac{4xL^3}{3}\right)/EI$$

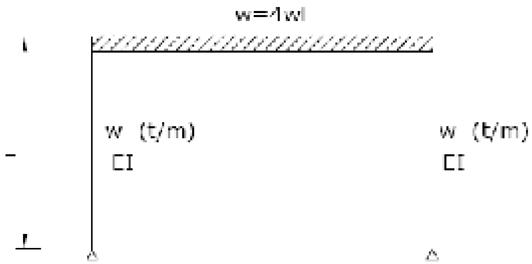


(حل در جزوه)

در قاب زیر ستون ها به شالوده به صورت مفصلی متصل اند. تیر صلب فرض میشود. وزن هر متر طول ستون W و وزن کل تیر $4WL$ می باشد. دوره تناوب طبیعی ارتعاش قاب را به 2 روش زیر بدست آورید.

$$1:\ y = p_x \frac{(3L^3 - x^3)}{12EI}$$

$$2:\ y = w\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3L}{2} + \frac{4xL^3}{3}\right)/EI$$



روش S.W

با استفاده از فورمول زیر تناوب سازه به روش S.W به دست می آید:

$$\omega^2 = g\,\frac{\int_0^l m(x)y(x)dx + \sum w_i\Delta_i}{\int_0^l m(x)\big(y(x)\big)^2dx + \sum w_i\Delta_i^2}$$

$$\sum w_i\Delta_i = 4wL \times y_{1(x=L)} = 4wL \times \left(4wL\,\frac{\left(3L^3 - L^3\right)}{12EI}\right) = \frac{8}{3}\,\frac{w^2L^5}{EI}$$

$$\sum w_i\Delta_i^2 = 4wL \times y_{1(x=L)}^2 = 4wL \times \left(4wL\,\frac{\left(3L^3 - L^3\right)}{12EI}\right)^2 = \frac{16}{9}\,\frac{w^3L^9}{(EI)^2}$$

$$2\int_0^l m(x)y(x)dx = 2\int_0^l w\,\frac{w}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3L}{2} + \frac{4xL^3}{3}\right)dx$$

$$= \frac{2w^2}{EI}\left(\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{8}x^4L + \frac{2}{3}x^2L^3\right)_0^L = \frac{2w^2}{EI}\left(\frac{11}{20}L^5\right) = 1.1\,\frac{w^2L^5}{EI}$$

$$2\int_0^l m(x)\big(y(x)\big)^2dx = 2\int_0^l w\,\left(\frac{w}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3L}{2} + \frac{4xL^3}{3}\right)\right)^2 dx$$

$$= \frac{2w^3}{(EI)^2}\left(\frac{1}{5184}x^9 - \frac{1}{192}Lx^8 + \frac{1}{28}L^2x^7 + \frac{1}{54}L^3x^6 - \frac{4}{15}L^4x^5 + \frac{16}{27}L^6x^3\right)$$

$$\frac{2w^3}{(EI)^2} \times \frac{34033}{90720}L^9 = 0.75\frac{w^3L^9}{(EI)^2}$$

$$\omega^2 = g\frac{1.1\frac{w^2L^5}{EI} + \frac{8}{3}\frac{w^2L^5}{EI}}{0.75\frac{w^3L^9}{(EI)^2} + \frac{16}{9}\frac{w^3L^9}{(EI)^2}} = 1.49g\left(\frac{EI}{wL^4}\right) \Longrightarrow \omega = \sqrt{1.49g\left(\frac{EI}{wL^4}\right)}$$

روش مستقیم

ستون ها را مانند یک فنر و تیر را به عنوان وزنه در نظر میگیریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = 2\left(\frac{3EI}{L^3}\right) = \frac{6EI}{L^3}$$

$$m = \frac{4wL}{g}$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\frac{6EI}{L^3}}{\frac{4wL}{g}}} = \sqrt{1.5g\left(\frac{EI}{wL^4}\right)}$$